Question 1 : **Comment montrer qu'une application de E dans F est linéaire ? est un endomorphisme ? est un isomorphisme ?**

1. Donner une méthode pour chacune de ces questions.

2. Exemples (en rédiger un au choix) : préciser des espaces de départ et d'arrivée cohérents avec l'énoncé puis montrer que f est un endomorphisme.

   a. $f : (x,y) \mapsto (2x-y, 3x)$
   b. $f : P \mapsto P(X-1) - P(X+1)$
   c. $f : M \mapsto {}^tM$

Question 2 : **Travailler les modes de définitions d'une application linéaire**
Voici les différents modes de définition d'une application linéaire :

- On donne $f(u)$ pour u un vecteur quelconque de E (on donne donc "l'expression" de f).
- En dimension finie, on donne les images d'une base de E,
- En dimension finie, on donne sa matrice dans des bases précisées (une base pour l'espace de départ, une pour l'espace d'arrivée),
- On donne les restrictions de f à deux supplémentaires de E.

On définit ci-dessous des applications linéaires sur un espace E. Pour chacune d'entre elles, identifier le mode de définition puis exprimer l'image d'un vecteur u quelconque de E.

1. $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \mapsto & (2x-y, x, -y) \end{array}$

2. On note (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On donne $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ telle que $f(e_1) = (2,-1)$, $f(e_2) = (0,-1)$ et $f(e_3) = (1,1)$.

3. On note (P_0, P_1, P_2) la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$. On définit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}_2[X], M_2(\mathbb{R}))$ par
   $f(P_0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $f(P_1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $f(P_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

4. Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$. On donne la matrice de f dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

5. Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}_2[X], \mathbb{R}_1[X])$. On donne la matrice de f dans les bases canoniques de $\mathbb{R}_2[X]$ et $\mathbb{R}_1[X]$: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

6. On rappelle que $\mathscr{A}$, le sous-espace des matrices anti-symétriques de $M_2(\mathbb{C})$ et $\mathscr{S}$, le sous-espace des matrices symétriques de $M_2(\mathbb{C})$, sont supplémentaires dans $M_2(\mathbb{C})$. On définit f, endomorphisme de $M_2(\mathbb{C})$ par
   $f_{/\mathscr{A}} : M \mapsto -M$ et $f_{/\mathscr{S}} : M \mapsto 2M$.

Question 3 : **Comment déterminer le noyau ou l'image de f ?**
Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$.

1. Donner la définition de $\ker f$ et de $\operatorname{Im} f$.

2. Comment traduit-on "$u \in \ker f$" ?

3. En dimension finie :
➢ Donner une deuxième description de $\mathrm{Im} f$ obtenue à partir d'une base de E.

➢ Quel théorème permet de lier les dimensions de $\ker f$ et de $\mathrm{Im} f$? Donner son nom et énoncez-le :

4. Déterminer le noyau et l'image des applications linéaires suivantes :

a. $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \mapsto & (2x-y, x, -y) \end{array}$

b. $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^3$ est : $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & -4 \end{pmatrix}$.

c. $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \to & \mathbb{R}_2[X] \\ P & \mapsto & P(0)X - P(1) \end{array}$

d. $f \in \mathscr{L}(M_2(\mathbb{R}))$ définie par $M \mapsto {}^tM + M$.

Question 4 : **Comment montrer qu'une application linéaire est bijective ?**
Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$.

1. Comment montrer que f est injective ? que f est surjective ?

2. On suppose ici que E et F sont de dimension finie et $\dim E = \dim F$. Proposer trois façons de montrer que f est bijective :
➢ avec f :

➢ avec la matrice :

➢ avec la famille $(fe_1), \dots, f(e_n))$ pour $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E :

3. Reprendre les exemples de l'exercice 3. et dire (en justifiant) si f est bijective.

Question 5 :
Retour sur les matrices d'une applications linéaire
Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$. On suppose ici que E et F sont de dimension finie et on note $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E. On note $n = \dim F$.

1. Quelle est la dimension de E ?

2. Donner la notation de "la matrice de f dans les bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$". *Que désigne $\mathscr{C}$ dans cette phrase ?*

3. Proposer une phrase pour définir "la matrice de f dans les bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$".

4. Expliquer (en plusieurs étapes) comment on construit "la matrice de f dans les bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$".

5. Reprendre les exemples de l'exercice 3. et donner les matrices des applications dans les bases canoniques des espaces concernés. Pour l'item b, on donnera plutôt les images par f de la base canonique de $\mathbb{R}^3$.