I. ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES D'ORDRE 1

1. Traduire.
"y est solution de $y' - ty = e^t$" signifie que y est ....

2. Résoudre $y' + 2y = 3$.

3. Expliquer à quel endroit de l'exemple précédent vous avez utilisé le théorème sur la structure de l'ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1 .

4. On considère l'équation $y' - ty = 0$. Dans chaque cas, dites pourquoi la réponse proposée est fausse ou invalide. $\mathscr{S}$ désigne l'ensemble des solutions de l'équation.

- $\mathscr{S} = \left\{t \mapsto e^{t^2/2}\right\}$.
- $\mathscr{S} = \left\{\alpha e^{t^2/2}\right\}$.
- $\mathscr{S} = \left\{t \mapsto \alpha e^{x^2/2},\ \alpha \in \mathbb{R}\right\}$.
- $\mathscr{S} = \left\{t \mapsto \alpha e^{t^2/2}\right\},\ \alpha \in \mathbb{R}$.

5. On considère l'équation $y' - \frac{1}{t} y = t$ sur $]0, +\infty[$. Dans chaque cas, dites pourquoi la réponse proposée est fausse ou invalide. $\mathscr{S}$ désigne l'ensemble des solutions de l'équation.

- $\mathscr{S} = \{t \mapsto \alpha t,\ \alpha \in \mathbb{R}\}$.
- $\mathscr{S} = \left\{t \mapsto \alpha t + \beta t^2,\ (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}\right\}$.
- $\mathscr{S} = \left\{t \mapsto t^2\right\}$.
- $\mathscr{S} = \left\{t^2 + \alpha t\right\},\ \alpha \in \mathbb{R}$.

6. *Problème de Cauchy* : On considère l'équation différentielle suivant : $y' + \frac{1}{1-x} y = \frac{1}{x+1}$.
VRAI/FAUX ? (Justifier)
➢ Il existe une unique solution y de ce problème, définie sur $\mathbb{R}$.

➢ Il existe une unique solution y de ce problème, définie sur $]-1, 1[$ telle que $y(0) = 1$ et $y'(0) = 1$.

➢ La fonction $x \mapsto \frac{1}{1-x}$ est solution de l'équation homogène.

➢ La fonction $x \mapsto 1 - x$ est solution de l'équation homogène.

➢ Il existe une solution de l'équation complète définie sur $]1, +\infty[$.

7. Résoudre l'équation $y' + y = 2x$.

II. ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES D'ORDRE 2

1. Traduire : "y est solution de $y'' - 8ty' + y = 5t$" signifie que y est ....

2. Résoudre $y'' - 4y' + 4y = e^{2t}$.

3. Résoudre $y'' - 4y' = 4$ par deux méthodes différentes.

4. On considère l'équation $x^2y'' - 2xy' + (2 - x^2)y = 0$ sur $]0, +\infty[$.
Dans chaque cas, dites pourquoi la réponse proposée est fausse ou invalide. $\mathscr{S}$ désigne l'ensemble des solutions de l'équation.

- $\mathscr{S} = \left\{x^2 - \alpha x + \beta x\right\}$, $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.
- $\mathscr{S} = \left\{x \mapsto \alpha x + x^2,\ \alpha \in \mathbb{R}\right\}$.
- $\mathscr{S} = \left\{x \mapsto \alpha t + \beta t^2 - t^3,\ (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2\right\}$.
- $\mathscr{S} = \left\{x \mapsto 1 + \dfrac{1}{x}\right\}$.

5. L'équation $y'' + 4y' + 4y = 0$ a pour ensemble de solutions sur $\mathbb{C}$:

a. $\{x \mapsto \lambda e^{2ix} + \mu e^{-2ix},\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2\}$.
b. $\{x \mapsto \lambda \cos(2x) + \mu \sin(2x),\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2\}$.
c. $\{x \mapsto (\lambda x + \mu)e^{-2x},\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2\}$.

6. L'équation $y'' - 2y' + 5y = 0$ a pour ensemble de solutions, d'inconnue $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

a. $\{x \mapsto e^x(\lambda e^{-2x} + \mu e^{2x}),\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}$.
b. $\{x \mapsto e^x(\lambda e^{2ix} + \mu e^{-2ix}),\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}$.
c. $\{x \mapsto e^x(\lambda \cos(2x) + \mu \sin(2x)),\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}$.

7. Soit l'équation (E) : $y'' + 3y' - 4y = (x^2 - 1)e^{-4x}$, d'inconnue $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
Sous quelle forme peut-on chercher une solution particulière de (E) ?

8. On considère l'équation $xy'' + 2(x+1)y' + 2y = 0$ sur $]0,+\infty[$. On sait que $x \mapsto \dfrac{e^{-2x}}{x}$ est une solution.
➢ Déterminer une solution de la forme $x \mapsto x^n$ avec un $n \in \mathbb{Z}$ à déterminer.

➢ En déduire l'ensemble des solutions de l'équation.

➢ Précisez le théorème que vous avez utilisé pour trouver l'ensemble des solutions.

9. On considère l'équation $x^2y'' - 2xy' + (2-x^2)y = 0$ sur $]0,+\infty[$.
Résoudre cette équation en posant $z\,:\,x \mapsto \dfrac{y(x)}{x}$.

10. *Vrai ou Faux ?*

a. Toute équation différentielle du premier ordre admet une solution.

b. Les courbes intégrales de deux solutions distinctes d'une même équation différentielle linéaire d'ordre un du type $y' + a(t)y = b(t)$, (où a et b sont définie sur $\mathbb{R}$ et continues) ne peuvent être sécantes.

c. On considère l'équation $xy' + y^2 = \ln x$. Pour résoudre cette équation sur $\mathbb{R}_+^*$, on ajoute une solution particulière à une solution quelconque de l'équation homogène $xy' + y^2 = 0$.

d. Pour résoudre $xy'' - 2y' + y = 0$, on commence par résoudre l'équation caractéristique $xr^2 - 2r + 1 = 0$.

e. On peut appliquer le principe de superposition à toutes les équations différentielles d'ordre un ou deux.

f. Pour chercher les solutions à valeurs réelles de l'équation (E) $y'' - 3y' + 2y = -xe^x \sin(2x)$, on peut s'intéresser à l'équation $y'' - 3y' + 2y = xe^{(1+2i)x}$, en chercher une solution y_1 (à valeurs complexes) et on prendra la partie réelle de y_1 pour solution particulière de (E).

g. On peut trouver une solution particulière de l'équation $y'' - 3y' + 2y = -xe^{(1+2i)x}$ sous la forme $x \mapsto Q(x)e^{(1+2i)x}$, avec Q un polynôme de degré 1 car $1+2i$ n'est pas racine de l'équation $r^2 - 3r + 2 = 0$.

Corrigé

Exercice 1

a. FAUX. Nous avons montré que toute équation différentielle **linéaire** du premier ordre admet une solution. Il manque le mot linéaire...

b. VRAI. On est dans le cadre équation différentielle linéaire du premier ordre normalisée : l'énoncé proposé découle de l'unicité au problème de Cauchy.

c. FAUX. Là encore, il faut remarquer que l'équation proposée n'est pas **linéaire**. Le fait que la solution générale d'une équation est la somme d'une solution particulière avec la solution générale de l'équation homogène est obtenu grâce à la linéarité de l'équation.

d. FAUX. Attention : ce n'est pas une équation à **coefficients constants**...

e. FAUX. Toujours la linéarité...Si les équations considérées sont linéaires, alors c'est vrai !

f. FAUX. Pour chercher les solutions à valeurs réelles de l'équation (E) $y''-3y'+2y=-xe^x\sin(2x)$, on peut s'intéresser à l'équation $y''-3y'+2y=xe^{(1+2i)x}$: c'est VRAI car $\sin(2x)=Im(e^{2ix})$.
On trouve une solution y_1 (à valeurs complexes) de cette équation et on prendra $-\mathrm{Im}(y_1)$ pour solution de (E), car $-xe^x\sin(2x)=-\mathrm{Im}(xe^{(1+2i)x})$.
On peut aussi décider de considérer l'équation $y''-3y'+2y=-xe^{(1+2i)x}$ et dans ce cas, on prendra $\mathrm{Im}(y_1)$ car $-xe^x\sin(2x)=\mathrm{Im}(-xe^{(1+2i)x})$.

g. VRAI.

Exercice 2
L'équation $y''+4y'+4y=0$ a pour ensemble de solutions sur $\mathbb{C}$:

1. $\{x\mapsto \lambda e^{2ix}+\mu e^{-2ix},\ (\lambda,\mu)\in\mathbb{C}^2\}$.
2. $\{x\mapsto \lambda\cos(2x)+\mu\sin(2x),\ (\lambda,\mu)\in\mathbb{C}^2\}$.
3. $\{x\mapsto (\lambda x+\mu)e^{-2x},\ (\lambda,\mu)\in\mathbb{C}^2\}$.

Réponse 3 : $\{x\mapsto (\lambda x+\mu)e^{-2x},\ (\lambda,\mu)\in\mathbb{C}^2\}$.

Exercice 3
L'équation $y''-2y'+5y=0$ a pour ensemble de solutions, d'inconnue $y:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$:

1. $\{x\mapsto e^x(\lambda e^{-2x}+\mu e^{2x}),\ (\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2\}$.
2. $\{x\mapsto e^x(\lambda e^{2ix}+\mu e^{-2ix}),\ (\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2\}$.
3. $\{x\mapsto e^x(\lambda\cos(2x)+\mu\sin(2x)),\ (\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2\}$.

Réponse 3 : $\{x\mapsto e^x(\lambda\cos(2x)+\mu\sin(2x)),\ (\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2\}$.

Exercice 4
Soit l'équation (E) : $y''+3y'-4y=(x^2-1)e^{-4x}$, d'inconnue $y:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.
Sous quelle forme peut-on chercher une solution particulière de (E) ?
Sous la forme : $y(x)=Q(x)e^{-4x}$ avec Q fonction polynomiale de degré 3 car -4 est racine simple de l'équation caractéristique.

Exercice 5
Résoudre $y'-xy=3x$ où $y:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.
Ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$:$\{x\mapsto -3+\lambda e^{x^2/2},\ \lambda\in\mathbb{R}\}$.