Chapitre Analyse 2 : Intégrales généralisées

Le but de ce framapad est de vous permettre de poser vos questions, mais aussi de dire ce que vous n'avez pas compris ou de dire ce que vous avez compris ! L'idée est ensuite de discuter ensemble de ce qui vous bloque en choisissant une question parmi celles que vous aurez posées)

J'inscris ici les réponses que vous envoyez par mail. Il serait probablement plus simple que vous écriviez directement vos questions (le code couleur rendrait tout ça plus lisible) et pourquoi ne pas indiquer vos noms ? (toutes ces questions sont pertinentes, toutes les questions sont utiles !)

Dans le poly Intégrales Généralisées, Exemple 1) b) page 1. Je ne comprends pas pourquoi la limite de F(x) est faites quand x tend vers + l'infini alors que notre intégral va de 0 à 1. Et par ailleur je ne comprends pas non plus pourquoi le résultat de cette limite en + l'infini est + l'infini.
J'espère avoir été clair.
Effectivement, il y a un souci ! L'intégrale va de 0 à 1, donc il faut considérer F(x) quand x tend vers 1. Comme F(x)=-ln(1-x) (oubli de primitive ??), la limite quand x tend vers 1 est +infini. Deux erreurs donc : la primitive (!) et le x->+infini, qu'il faut remplacer par x->1. Je pense que cela devient alors cohérent ?
Oui je comprends mieux merci

Re bonjour, je retrouves la même incompréhension dans l'exemple 4 car toutes les limites sont faites en +infini mais leurs résultats ne sont pas cohérents.
Exact, merci de cette relecture ! J'ai été trop vite en rédigeant les exemples, et j'ai du abuser des copier-coller...Les x-> +infini sont donc à corriger. Par contre, le reste me semble correct (primitives et limites). Est-ce aussi ta conclusion ?
... Et l'erreur est aussi présente dans l'exemple 5 du poly !!! Désolée !

Question par mail 1 : Je bloque pour l'exercice 2 dans le travail de cours depuis un petit moment le petit 3) c'est la puissance 3 .

Réponse 1 : Pour cet exemple, il faut (comme pour les autres) revenir à la définition. La fonction t->1/t^3 est continue sur]0,1]. On pose F(x)= inte_{x}^{1} 1/t^3 dt. Il faut alors exprimer F(x) en cherchant une primitive de t-> 1/t^3.

bonjour, je ne vois pas pourquoi on parle de la fonction 1/t^3 sachant qu'il est question de la fonction x/(1-x^3)^1/2?
Ok, je me suis trompée avec l'exercice 1 (c'est le "puissance 3" dans la question qui m'a induit en erreur je pense !)
Donc ici, il ne s'agit pas de revenir à la définition car il n'y a pas (a priori) de primitive facile à trouver (et le calcul n'est pas demandé).
La fonction x->x/(1-x^3)^(1/2) est continue sur [0,1[. La fonction est positive sur cet intervalle, le problème est en 1.
Je cherche à utiliser un théorème de comparaison, le plus simple : par équivalent.
Il faut factoriser 1-x^3 pour faire apparaitre 1-x (terme qui reste tel quel pour l'équivalent). Rappelez-vous vos formules de factorisation (a^n-b^n=(a-b)(a^(n-1) + ...))ou faites-le "à la main". On trouve :
1-x^3=(1-x) (1+x+x^2)
Et on en déduit (1-x^3) équivalent (en 1) à ((1-x) * 3)
Je vous laisse poursuivre

Question par mail 2 : Dans l’exercice 1 du Travail de cours, je n’arrive pas à rédiger correctement le n*8. Je pose un c appartenant à]-I,+I[, et donc un x1 entre]-I,c] et x2 entre [c,+I[, mais je ne peut donc pas exprime F(x) comme je n’ai pas défini x.. je ne sais pas si ma méthode est bonne, je voudrais montrer que chacune des intégrales entre ces deux intervalles convergent pour affirmer que la totalité converge ou pas

Réponse 2 : il faut se reporter à l'exemple 5 du poly, en corrigeant les limites (elles se font pour x-> -2 pour le a. et le b., et non pas pour x->+infini, erreur pointée ci-dessus à cause d'un abus de copier-coller !)
On fixe une valeur arbitraire (que vous choisissez donc comme vous voulez) dans l'intervalle d'étude. Ici, par exemple 0. Et ensuite on regarde séparément deux intégrales : l'une de 0 à x ... et l'autre de x à 0.
Dans chaque cas, on va chercher une primitive (en fait ce sera la même, c'est une primitive de f sur R).

ex 2 1) pour la convergence en +infinie, je ne vois pas sur qu'elle propriété m'appuyer. e(-t) va tendre vers 0 et 1/(t)^1/2 également. je ne vois pas comment bien rédiger.
Donc : exercice 2 du travail du cours. 1)
La fonction f : t -> e^(-t)/ t^{1/2} est **continue sur]0,+infini[**. On s'intéresse à deux intégrales (on choisit de couper par exemple en 1) : inte_0^1 ... et inte_1^{+infini} ....
<u>Etude en +infini</u> : Pour t>1, on a 1/t^{1/2} <1, on peut donc majorer et utiliser un théorème de comparaison (car f positive).
On pourrait aussi justifier que f(t) = o(1/t^2) en +infini, non ? Et là aussi un théorème de comparaison permet de conclure.
BILAN : lorsque l'on ne demande pas le calcul/ lorsque l'on ne "voit" pas de primitive , on utilise souvent un théorème de comparaison (sans oublier de justifier que les fonctions sont positives)

Question par mail 3 : Question bête mais dans la fiche travail de cours, dans l'exercice 2 petit 2), est il possible de majorer cos par 1 et donc on obtient une intégrale de 0 car ln1=0 ?
Mais cela me paraît bizarre et je ne trouve pas d'autre moyen de résoudre cette intégrale.
Réponse 3 : c'est un bon réflexe de majorer cos par 1. Mais ici, cela conduit à majorer ln(cos(1/t)) par 0. Ce qui est correct mais n'apporte rien. Pourquoi d'ailleurs ?
Posez-vous la question de l'outil que vous utilisez : ici majoration donc théorème de comparaison (attention on ne majore que les fonctions sous l'intégrale, pas les intégrales car pour l'instant on cherche à prouver la convergence, i.e. l'existence de l'intégrale).
Mais le théorème de comparaison par inégalité ne s'applique qu'aux fonctions positives... et là, la comparaison amène à s'apercevoir que la fonction f : t-> ln(cos(1/t)) est négative sur [1,+infini[, non ?
Alors deux options :
- soit on se ramène à des fonctions positives, en multipliant par -1. Alors il faut majorer - ln (cos(1/t)) et donc minorer ln(cos(1/t)) ... ce qui va être plus compliqué.
- soit on cherche un autre théorème de comparaison qui s'applique aussi pour les fonctions toujours négatives (attention à préciser que le signe des fonctions pour tous les thm de comparaison) : par équivalent !

Ici, pour obtenir un équivalent, on va commencer par travailler avec des développements limités : sachant que pour t proche de +infini, 1/t est proche de 0.

Bilan : question pas bête du tout !! Les exercices ne sont pas simples dans l'exercice 2. C'est bien d'y réfléchir et de voir ce qui bloque. Mais c'est normal que cela bloque !!

Question par mail 4 : En nous penchant sur la question 4 du travail du cours, nous bloquons sur ce signifie « pour la convergence en 0/+oo ».
Par exemple, les intégrales de Riemann sont des intégrales de référence mais comment savoir si elles rentrent dans la catégorie « en 0 » ou « en +oo ».
Réponse 4 : Merci pour cette question !! Si on revient à l'intégrale, il y a des bornes (qui sont appelées a et b dans le cours, mais qui sont suivant les exemples des nombres (souvent 0 ou 1) ou +-infini).
On commence toujours par regarder la continuité de la fonction f (celle sous l'intégrale) : f est-elle continue sur [a,b], sur]a,b], sur [a,b[ou sur]a,b[?
En fonction de cette première observation, on étudie la convergence de l'intégrale "en a" ou "en b" ou les deux. C'est-à-dire qu'on fait une étude, qu'on utilise un théorème en se concentrant au voisinage de la borne pour laquelle le crochet est ouvert. Si on revient à la définition par exemple, on pose un F(x) = ... et on fait tendre x vers a si c'est en a que le crochet de l'intervalle (du début) est ouvert. D'accord ?

Je pourrais dire que la borne a (ou la borne b) pose problème. On peut dire aussi que "le point a est incertain".
Dans la question 4, je vous demande de lister les résultats de référence. Ceux-ci ne concerne que des intégrales avec une seule borne à problème (enfin je crois). C'est pour cela que je parle "d'intégrales de référence pour la convergence en 0" ou en "+infini". Je désigne ainsi la borne qui pose problème. C'est aussi parce que pour les théorèmes de comparaison, c'est une comparaison locale qui est demandée (un équivalent au voisinage de a par ex).
Pour conclure, j'ai utilisé la une formulation vague, et vous avez tout-à-fait raison de vous interroger !
J'espère que ce que j'ai écrit là rend les choses plus claires ?

RUBRIQUE HELP ! (Indiquez ici ce que vous n'avez pas compris, ce qui reste obscur, ce que vous souhaitez retravailler. Chacun peut apporter son aide)

RUBRIQUE EUREKA ! (Indiquez ici ce que vous pensez avoir enfin compris, et donc ce que vous pouvez expliquer aux autres, avec vos mots à vous)