I. ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES D'ORDRE 1

➢ Comprendre chacun des mots du titre

➢ Comprendre les objets et notations

• solution d'une équation différentielle : savoir traduire " y est solution de $y' + 2y = \cos t$ "

➙ y est une …

➙ $\forall t \in I$, …

• une équation différentielle est une notation abusive : que signifie "résoudre l'équation $ty' + y = 0$ sur $]0, +\infty[$" ?

C'est chercher …

• qu'est-ce qu'un problème de Cauchy ? Donner un exemple.

➢ Connaître les principaux théorèmes.

Quelle est la <u>structure</u> de l'ensemble des solutions (i.e. à quoi ressemble l'ensemble des solutions)

• d'une équation homogène ?

• d'une équation complète ?

• Prenons une équation différentielle linéaire d'ordre 1 (E) et son équation homogène (H). On suppose que l'on connaît f une solution non nulle de l'équation (H) et g une solution de (E). Donner l'ensemble $\mathscr{S}_0$ des solutions de H et l'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions de (E).

➙ $\mathscr{S}_0 = \dots$

➙ $\mathscr{S} = \dots$

➢ savoir résoudre :

• une équation différentielle linéaire d'ordre 1 homogène.

On considère (H) : $y' - \frac{1}{t^2} y = 0$. Résoudre cette équation et, en parallèle, expliciter les étapes (ce qui fournit un résumé de la méthode)

• mener une variation de la constante (résumer la méthode et donner l'objectif)

On considère $(E)\ :\ y' - \dfrac{1}{t^2}\,y = e^{t-\frac{1}{t}}$. Résoudre cette équation et, en parallèle, expliciter les étapes (ce qui fournit un résumé de la méthode)

Traiter l'exercice 1 du poly. (Les réponses sont en page 8 du poly)

II. ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES D'ORDRE 2

➢ Comprendre chacun des mots du titre

➢ Comprendre les objets et notations

• solution d'une équation différentielle : savoir traduire " y est solution de $y'' + 2y' + y = e^t$ "

• une équation différentielle est une notation abusive : soit (E) l'équation $y'' + a(t)y' + b(t) = c(t)$.
Quelles sont les données ?
Quelles hypothèses sur les données ?
Qui est l'inconnue ?
Nature de l'inconnue ?

• Qu'est-ce qu'un problème de Cauchy ? Donner un exemple.

➢ Connaître les principaux théorèmes.
Quelle est la structure de l'ensemble des solutions

• d'une équation homogène ?

• d'une équation complète ?

• Prenons (E), une équation différentielle linéaire d'ordre 2 et son équation homogène (H). On suppose que $f\ :\ t \mapsto e^t$ et $g\ :\ t \mapsto t^2+1$ sont deux solutions de l'équation (H). De plus, $h\ :\ t \mapsto te^{-t}$ est une solution de (E).
Donner l'ensemble $\mathscr{S}_0$ des solutions de H et l'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions de (E).

➙ $\mathscr{S}_0 = \dots$

➙ $\mathscr{S} = \dots$

➢ Savoir résoudre une équation différentielle linéaire d'ordre 2, à coefficients constants

• Méthode de résolution pour une équation différentielle linéaire d'ordre 2, à coefficients constants :

➙ homogène (résumer la méthode en traitant les exemples : $y''+2y'-3y=0$ / $y''+\omega_0 y=0$ / $y''-a^2y=0$ avec ω_0 et a des réels positifs.)

➙ avec second membre exponentiel (résumer la méthode en traitant l'exemple $y'' + 2y' - 3y = e^x$, éventuellement en proposant d'autres exemples pertinents)

➙ avec second membre trigonométrique (résumer la méthode en traitant l'exemple $y'' + 2y' - 3y = \cos x$)

Traiter l'exercice 2 du poly. (réponses en page 8)

➢ Savoir résoudre une équation différentielle linéaire d'ordre 2, à coefficients non constants, avec une aide
• Cas des équations homogènes (5.a. Ex1, Ex2, Ex3, Ex4)

➙ Exemple 1 : Résoudre $(-t^2+1)y''+2ty'-2y=0$ en cherchant des solutions polynomiales.

<u>Première étape : quel degré prendre ?</u>

On cherche une solution sous la forme $y\ :\ t\mapsto t^n+P(t)$ avec $n\in\mathbb{N}$ et P une fonction polynomiale de degré inférieur strictement à n.

On calcule y' et y'' :

On veut que y soit solution et on s'intéresse surtout aux termes de degré n :

y solution si et seulement si $\forall t\in\mathbb{R}, \ldots\ldots\ldots t^n+\cdots=0$.

On en déduit que $n=2$ ou $n=1$.

<u>Deuxième étape : on reprend les calculs avec le bon degré !</u>

On cherche une solution sous la forme $y\ :\ t\mapsto at^2+bt+c$, avec $a,\ b,\ c\ \in\mathbb{R}$.

On calcule y' et y'' :

y solution si et seulement si $\forall t\in\mathbb{R}$,

<u>Conclusion</u> : on a trouvé deux solutions de l'équation homogène. Ces solutions forment une famille libre (dans l'espace vectoriel des fonctions de classe C^2 sur $\mathbb{R}$). On en déduit l'ensemble des solutions :

$\mathscr{S}_0=\{\ldots$

➙ Exemple 2 : Résoudre $t^3y''+ty'-y=0$. La fonction $t\mapsto t$ est une solution évidente.

On connaît une solution, on va donc utiliser la **méthode de Lagrange**.

On cherche une deuxième solution y de (H) sous la forme $y=\lambda y_1$ avec λ une **fonction** deux fois dérivable sur I et non constante.

On calcule y' puis y'' :

y solution si et seulement si $\forall t\in\mathbb{R}$,

<u>Conclusion</u> :on a trouvé deux solutions de l'équation homogène. Ces solutions forment une famille libre (dans l'espace vectoriel des fonctions de classe C^2 sur $\mathbb{R}$). On en déduit l'ensemble des solutions :

$\mathscr{S}_0=\{\ldots$

➙ Exemple 3 : Résoudre $t^2y''+3ty'+y=0$ d'inconnue $y\ :\ ]0,+\infty[\to\mathbb{R}$. On posera $x=\ln(t)$.

On effectue un **changement de variables** qui doit nous amener à une équation plus simple.

<u>Première étape : introduction du changement de variables</u>

Posons $x=\ln t$ pour $t\in]0,+\infty[$. On a $t=e^x$.

Ce qui nous amène à poser la fonction $z\,:\,x \mapsto y(e^x)$.
On a aussi $\forall\, t \in]0,+\infty[,\ y(t) = z(\ln t)$.
Pour y de classe C^2 sur $]0,+\infty[$, z est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$.
Deuxième étape : calculs pour arriver à une équation en z
On exprime les dérivées de y : pour $t \in]0,+\infty[$,
$y(t) = z(\ln t)$
$y'(t) = \dots$
$y''(t) = \dots$
On exprime le fait que y est solution : y solution si et seulement si $\forall\, t \in \mathbb{R}$,

si tout va bien, on peut exprimer une nouvelle équation en x et $z(x)$, $z'(x)$, $z''(x)$, plus simple que la première.
Troisième étape : on trouve z puis on revient à y
z est de la forme …
donc y est de la forme …
L'ensemble des solutions de l'équation $t^2y'' + 3ty' + y = 0$ est $\mathscr{S} = \{\dots$.

➞ Exemple 4 : Résoudre $(t^2+t)y'' + (3t+1)y' + y = 0$ d'inconnue $y\,:\,]0,+\infty[\to\mathbb{R}$. On posera $z\,:\,t \mapsto (1+t)y(t)$.
On effectue un **changement de fonctions** qui doit nous amener à une équation plus simple.
Première étape : introduction de la nouvelle fonction
On pose, pour tout $t \in]0,+\infty[$, $z(t) = (1+t)y(t)$.
On a aussi $\forall\, t \in]0,+\infty[,\ y(t) = \dfrac{1}{1+t}\ z(t)$.
Pour y de classe C^2 sur $]0,+\infty[$, z est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$.
Deuxième étape : calculs pour arriver à une équation en z
On exprime les dérivées de y : pour $t \in]0,+\infty[$,
$y(t) = \dfrac{1}{1+t}z(t)$
$y'(t) = \dots$
$y''(t) = \dots$
On exprime le fait que y est solution : y solution si et seulement si $\forall\, t \in \mathbb{R}$,

si tout va bien, on peut exprimer une nouvelle équation en t et $z(t)$, $z'(t)$, $z''(t)$, plus simple que la première.
Troisième étape : on trouve z puis on revient à y
z est de la forme …
donc y est de la forme …
L'ensemble des solutions de l'équation $(t^2+t)y'' + (3t+1)y' + y = 0$ est $\mathscr{S} = \{\dots$.

➞ Sur quel théorème s'appuie la conclusion des exemples 1 et 2 ?

➞ Les exemples 3 et 4 s'appuient sur des transformations, soit de la variable, soit de la fonction inconnue. Quel est l'objectif de ces transformations (et par conséquent, à quoi doit-on s'attendre lorsque l'on effectue la transformation) ?