I. Probabilités sur un univers dénombrable

Soit Ω un ensemble dénombrable.

- Donner la définition d'une probablité $\mathbb{P}$ sur $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega))$.

- On considère une suite croissante d'événements $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$.
  Que signifie que la suite est croissante ?

  Compléter $\mathbb{P}(\bigcup_{i=0}^{+\infty} A_i) =$

- Énoncer la formule des probabilités totales :

II. Variable aléatoire

- Une variable aléatoire réelle discrète sur un univers Ω est
  quel type d'objet ?

- On lance un dé non truqué quatre fois et on note X la variable aléatoire égale au nombre de 6 obtenus.
  Décrire $X(\Omega)$ l'ensemble des valeurs possibles prises par X :

  puis l'événement $(X = 2)$:

  puis l'événement $(X \leqslant 4)$:

- On lance un dé jusqu'à obtenir un 4. X est la variable aléatoire égale au nombre de lancer pour obtenir le premier 4. Donner $X(\Omega)$ et déterminer $P(X = x)$ pour $x \in X(\Omega)$ (on justifiera).

- Que signifie la variable aléatoire X suit la loi .... pour les cas suivants ?
  1. loi Bernoulli

2. loi uniforme

3. loi binomiale

4. loi géométrique

5. loi de Poisson

III. Espérance et variance

➢ Soit X une variable aléatoire réelle discrète telle que $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$.
Que signifie "X est d'espérance finie " ? Quelle est alors la définition de l'espérance de X ?

➢ Soit X une variable aléatoire réelle discrète telle que $X(\Omega) = \mathbb{N}$.
Que signifie "X est de variance finie " ? Quelle est alors la définition de la variance de X ?

➢ X est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(X > n+1) = \dfrac{2}{5}P(X > n)$.
Déterminer la loi de X et son espérance.

➢ Soit X une variable aléatoire discrète, soient $a,\ b$ des réels, compléter
$E(aX + b) =$
$V(aX + b) =$

➢ On rappelle le *théorème du transfert*

Soit X une variable aléatoire réelle discrète, soit f une application à valeurs réelles définie sur $X(\Omega) = \{x_n,\ n \in \mathbb{N}\}$.
Alors $f(X)$ est d'espérance finie si et seulement si $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} f(x_n)P(X = x_n)$ est absolument convergente.
Dans ce cas, on a $E(f(X)) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f(x_n)P(X = x_n)$.

Utilisez ce théorème pour calculer

– l'espérance de $Y = \dfrac{1}{X}$ avec X une variable aléatoire telle que $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$ (où $p \in]0,1[$).

– l'espérance de $X(X-1)$ pour X telle que $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ (où $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$).

➢ On suppose que la variable X est d'espérance finie. Donner deux expressions de l'espérance de X.

➢ On suppose que la variable X est de variance finie. Donner trois expressions de la variance de X.

➢ Soit X une variable aléatoire réelle discrète à valeurs positives admettant une espérance finie et une variance finie.
Soit $a > 0$, donner une majoration de $P(X \geqslant a)$?

Soit $\varepsilon > 0$, donner une majoration de $P(|X - E(X)| \geqslant \varepsilon)$?

➢ Rappeler les espérances et les variances des lois usuelles

1. loi uniforme :

2. loi binomiale :

3. loi géométrique :

4. loi de Poisson :

IV. Couples de VA

➢ Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires réelles discrètes sur un univers Ω.

– Donner la loi marginale de Y en fonction de la loi conjointe de (X, Y).

– Soit $n \in Y(\Omega)$. Donner la définition de la loi de X conditionnée à $(Y = n)$.

– X et Y sont supposée indépendantes, peut-on affirmer :
⋆ $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$?

⋆ $E(XY) = E(X)E(Y)$?

⋆ $V(X+Y) = V(X) + V(Y)$?

⋆ $V(XY) = V(X)V(Y)$?
L'une des propriétés ci-dessus est vraie même lorsque les variables ne sont pas indépendantes, indiquez laquelle.

– Donner la définition de la covariance de X et Y et du coefficient de corrélation linéaire.

➢ On lance une pièce équilibrée trois fois de suite. On note X la variable aléatoire égale à 1 si on obtient deux Faces consécutifs et 0 sinon. On note Y la variable égale au nombre de Face obtenus au cours des trois lancers. Un joueur perd Y euros si $X = 0$ et gagne Y euros si $X = 1$.

1. Déterminer la loi conjointe du couple (X, Y). Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

2. On note G le gain (algébrique du joueur). Déterminer l'espérance de G.

V. Séries génératrices