$\boxed{\text{Objectif}}$: La première partie du travail à mener consiste en des révisions de géométrie dans l'espace sur les plans, les droites, les sphères. Après ces révisions, vous devez savoir répondre aux questions suivantes :

1. Déterminer une équation du plan $\mathscr{P}$ passant par $A(1,0,-1)$ et de vecteur normal $\overrightarrow{n}(-1,1,2)$.
Le plan d'équation $x-y-2z+1=0$ est-il parallèle à $\mathscr{P}$?

2. Déterminer un système d'équations paramétrées puis cartésiennes de la droite $\mathscr{D}$ passant par $A(-1,2,1)$ et dirigée par $\vec{u}(0,2,-3)$. Cette droite intersecte-t-elle la sphère d'équation cartésienne $x^2+y^2+z^2+2y-2z=14$?

3. On considère les droites $D : \begin{cases} x-y+1=0 \\ y-2z-1=0 \end{cases}$ et $D' : \begin{cases} x+2y-z=0 \\ 2x-3y+z-2=0 \end{cases}$.
Déterminer un point et un vecteur directeur de chacune de ces droites. On les notera A, $\vec{u}$, A', $\vec{u}'$.
Sont-elles coplanaires ?

4. Déterminer des équations cartésiennes de la droite $\mathscr{D}$ passant par $A(1,0,2)$ et dirigée par $\vec{u}(-2,1,1)$.
Déterminer les **positions relatives** de $\mathscr{D}$ et de la droite $\mathscr{D}'$ passant par $B(0,-3,4)$ et perpendiculaire au plan d'équation $2x-y+z=1$.
On prend le point $C(2,-4,3)$ et la droite (BC). Montrer que (BC) et $\mathscr{D}$ sont coplanaires et donner une représentation paramétrique et une équation cartésienne d'un plan les contenant.

5. Déterminer la distance de $A(1,2,3)$ à la droite $\mathscr{D}$ passant par $B(-1,1,0)$ et dirigée par $\vec{u}(0,1,2)$.

6. Pour $m\in\mathbb{R}$, on considère le plan P_m d'équation $(m^2+2m)x+(1-m^2)y+(-m^2-m+1)z+m-1=0$.
Justifier que P_m est un plan (on vérifiera que les coefficients ne s'annulent pas pour une même valeur du paramètre m). Montrer que tous les plans P_m (quand m varie dans $\mathbb{R}$) passent par un même point que l'on précisera.

L'espace est muni de sa structure affine usuelle. On se place dans un repère orthonormé direct $\mathscr{R}=(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$.

I. Plans

➢ Ecrivez une synthèse sur la notion de plan affine dans l'espace. Cette synthèse doit aborder les points suivants :
➞ $\mathscr{P}$ peut être décrit par une équation cartésienne (EC) de la forme :

➞ $\mathscr{P}$ peut être décrit par des équations paramétriques (EP) de la forme :

➞ Un plan peut être défini par la donnée de … et dans chaque cas, indiquer comment on obtient une description par une/des équation(s) :

- $M\in\mathscr{P} \iff$
- $M\in\mathscr{P} \iff$
- $M\in\mathscr{P} \iff$

Exercice 1

1. Donner une équation cartésienne du plan passant par $A(1,2,-1)$ et dirigé par $\vec{u}(0,1,1)$ et $\vec{v}(-1,1,0)$.

2. Déterminer un vecteur normal du plan d'équation $-x+y-4z=3$.

3. Donner une équation cartésienne du plan passant par $M_0(x_0,y_0,z_0)$ et de vecteur normal $\vec{n}(x_0,x_0-y_0,z_0)$.

II. Droites

➢ Ecrivez une synthèse sur la notion de droite affine dans l'espace. Cette synthèse doit aborder les points suivants :
➙ Une droite peut être définie par la donnée de ....

Indiquer comment on obtient une description par une/des équation(s) :
➙ $\mathscr{D}$ peut être décrite par des équations cartésiennes (EC) de la forme :

➙ $\mathscr{D}$ peut être décrite par des équations paramétriques (EP) de la forme :

• Comment trouver un système d'équations cartésiennes à partir de la donnée d'un système d'équations paramétriques ?

• Comment trouver un système d'équations paramétriques à partir de la donnée d'un système d'équations cartésiennes ?

Exercice 2

1. Donner un système d'équations paramétriques de la droite passant par $M_0(x_0, y_0, z_0)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(x_0, 2y_0, z_0 + x_0)$.
2. Donner un système d'équations cartésiennes de la droite passant par $A(1, -2, 0)$ et dirigée par $\vec{u}(-1, 1, 3)$.
3. Déterminer un vecteur directeur de la droite définie par le système : $\begin{cases} 2x - y + z &= 1 \\ x + z &= -1 \end{cases}$.

III. Distances

➢ Ecrivez une synthèse sur la notion de distance dans l'espace. Cette synthèse doit aborder les points suivants :
➙ Définitions :
• de la distance d'un point à un plan :

• de la distance d'un point à une droite :

➙ Calculs de distances :
Donner les différentes formules avec une illustration et un moyen de les retrouver.

Exercice 3

1. On considère la droite $\mathscr{D}$ passant par $A(-1, 2, 1)$ et dirigée par $\vec{u}(1, 2, 3)$. Déterminer la distance du point O à la droite $\mathscr{D}$.
2. Quelle est la distance du point $B(x_0, x_0, x_0)$ au plan $\mathscr{P}$ d'équation $2x + 3y - 4z = -1$?
3. On considère les points $A(0, 0, 1)$ et $B(1, 1, 2)$. On désigne par Δ_1 la droite (AB) et par Δ_2 la droite d'équations : $x + y = 0,\ y + z = -1$.
   Déterminer l'ensemble des points à égale distance de Δ_1 et Δ_2 (on en donnera une équation cartésienne).

IV. Sphères et cercles, intersection d'ensembles

➢ Ecrivez une synthèse sur les notions de sphère et de cercles dans l'espace. Cette synthèse doit aborder les points suivants :
➙ Définitions :
• Une sphère est définie par la donnée de ....

• Un cercle peut être définie par la donnée de .... (deux possibilités) :

➙ Équation(s) :
Une sphère peut être décrite par des équations cartésiennes (EC) de la forme :

➢ Rappeler les résultats sur l'intersection entre un plan et une droite. Illustrez.

➢ Rappeler les positions relatives possibles entre deux droites de l'espace. Illustrez.

➢ Expliquer comment on détermine si un plan, connu par une équation cartésienne, intersecte une sphère connue par son centre et son rayon.

Exercice 4

1. Déterminer, s'il existe, le point d'intersection de la droite D passant par $A(0,1,1)$ et dirigée par $\vec{u}(-1,1,2)$ et du plan $\mathscr{P}$ d'équation $2x+y-3z=1$.
2. On considère les droites D passant par $A(0,1,1)$ et dirigée par $\vec{u}(-1,1,2)$ et D' définie par $\left\{\begin{array}{l} x-y=0 \\ y-z-1=0 \end{array}\right.$. Les droites D et D' sont-elles sécantes ? Sont-elles coplanaires ?
3. On considère la droite Δ paramétrée par $\left\{\begin{array}{ll} x & =t \\ y & =t \\ z & =t \end{array}\right.$. On note Ω un point de Δ.
   On considère une sphère de centre Ω et de rayon 1. A quelle condition sur Ω, le plan P d'équation $x-y+z=0$ intersecte-t-il la sphère ?

V. Surfaces et courbes

Question 1 :

➢ Soit Σ une surface définie par le paramétrage $\begin{cases} x &= s+2t^2 \\ y &= s^2-t \\ z &= s+t \end{cases}$, $(s,t)\in\mathbb{R}^2$.
Comment définit-on un point de Σ ?
Comment détermine-t-on un plan tangent en un point M_0 de Σ ?
➢ Soit Σ une surface définie par une équation cartésienne $x^2-2y^2=z+y$.
Comment définit-on un point de Σ ?
Comment détermine-t-on un plan tangent en un point M_0 de Σ ?

Question 2 :

Soit Σ une surface.
➢ Si Σ est définie par une fonction $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, comment détermine-t-on un plan tangent en un point M_0 de Σ ?
➢ Si Σ est définie par une fonction $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, comment détermine-t-on un plan tangent en un point M_0 de Σ ?

Question 3 :

Pour chacun des ensembles de points suivants, précisez
- si c'est une courbe ou une surface,
- pour une surface, quelle fonction vous utilisez pour la définir ($\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ ou $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$) et comment vous déterminez le plan tangent en un point (citez juste le cours),
- pour une courbe, comment vous déterminez la tangente en un point (citez juste le cours).

1. Γ définie par $\begin{cases} x(\theta) &= \theta\cos(\theta) \\ y(\theta) &= \theta\sin(\theta) \\ z(\theta) &= \dfrac{\theta^2}{8} \end{cases}$, $\theta\in\mathbb{R}$.

2. Γ définie par $x^2+y^2-8(x+y+z)=1$.

3. Γ définie par $\begin{cases} x-z &= 2 \\ y-2z &= 1 \end{cases}$.

4. Γ définie par $x=y=z$.

5. Γ définie par $\begin{cases} x &= u+v \\ y &= u^2+v^2 \\ z &= u^2-v^2 \end{cases}$, $(u,v)\in\mathbb{R}^2$.

6. Γ définie par $\begin{cases} x^2+y^2-z^2=1 \\ y=1 \end{cases}$.

7. Γ définie par $z=2x^2-xy$.

8. Γ définie comme l'intersection de $\Gamma_1 : (x+1)^2-(y-2)^2+z^2=1$ et $\Gamma_2 : x^2+z^2=1$.