I. Rappels sur les séries numériques

Préparer une synthèse du chapitre Séries numériques, et détailler les points suivants :

- ➢ Donner une stratégie d'étude de la convergence d'une série numérique $\sum u_n$, en rappelant la condition nécessaire de convergence, les principaux théorèmes de comparaison.
- ➢ Résultat sur les séries géométriques
- ➢ Critère de D'Alembert.
  Exercice d'application : pour quels $z \in \mathbb{C}$, la série $\sum \dfrac{z^n}{n!}$ converge-t-elle ?
- ➢ Produit de Cauchy de deux séries.
  Exercice d'application : montrer que pour tout $z_1,\ z_2$ dans $\mathbb{C}$, on a $e^{z_1+z_2} = e^{z_1} \times e^{z_2}$.

Introduction : dans ce chapitre, on se pose les questions suivantes (et j'indique des éléments de réponse) :
➢ On se donne une suite (a_n) de réels ou complexes. On considère la série entière $\sum a_n z^n$.
Pour quels z (en plus de 0) dans $\mathbb{C}$ (ou dans $\mathbb{R}$), la série converge-t-elle ? On cherche à définir un domaine D dans lequel la série converge.
On montre que ce domaine est toujours un disque (de rayon R, qu'on appelle alors rayon de convergence de la série) centré en 0*. En fait, c'est un disque si on travaille avec $z \in \mathbb{C}$ et un segment $]-R, R[$ si on travaille avec $z \in \mathbb{R}$. Dans le cas général, on ne peut pas affirmer ce qui se passe pour le bord du disque.*
➢ On peut alors définir une fonction sur ce disque D, appelée fonction somme de la série entière. $S : z \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} a_n z^n$.
On veut alors savoir si cette fonction est continue, dérivable sur D.
On montre que les fonctions sommes de séries entières sont de classe C^∞ sur D et on fait le lien entre les coefficients a_n et les dérivées $n-$ièmes calculées en 0 *(les $f^{(n)}(0)$).* Et on s'intéresse alors au calcul des dérivées et primitives, pour trouver des expressions simples de fonctions sommes de séries entières.
➢ Renversement du problème : on se donne une fonction f définie sur un domaine U de $\mathbb{C}$ contenant 0 (pas forcément un disque). On veut savoir si il existe une série entière dont f est la somme, au moins sur un voisinage de 0.
Par dérivation ou intégration, on va établir une liste de développements en séries entières pour nos fonctions usuelles.

II. Rayon de convergence

On se donne une suite (a_n) de réels ou complexes. On considère la série entière $\sum a_n z^n$.

- ➢ Donner la définition du rayon de convergence. *Associez la définition à un dessin faisant apparaître le disque*

  de convergence.
- ➢ Rappeler le rayon de convergence de la série $\sum z^n$.
  Quelle est la fonction somme de cette série entière ?

➢ On considère une série entière $\sum a_n z^n$ telle que $\sum a_n$ converge absolument. Que peut-on dire du rayon de convergence de la série entière ? *faire un dessin et/ou utiliser les remarques suivant la définition du rayon de convergence.*

➢ On considère une série entière $\sum a_n z^n$ telle que la suite (a_n) ne converge pas vers 0. Que peut-on dire du rayon de convergence de la série entière ? *S'intéresser au cas de* $z = 1$.

➢ On considère une série entière $\sum a_n z^n$ telle que la suite (a_n) est bornée.
Montrer que $\forall z \in \mathbb{C},\ |z| < 1 \implies \sum a_n z^n$ converge absolument.
Que peut-on en déduire du rayon de convergence de la série entière ?

➢ On considère deux séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$.
On sait que $\forall n \geqslant 0$, $|a_n| \leqslant |b_n|$, et que le rayon de $\sum b_n z^n$ vaut 2.
Que peut-on en déduire sur le rayon de $\sum a_n z^n$?

➢ On rappelle le critère de D'Alembert.

> Soit (u_n) une suite à termes strictement positifs. On suppose que la suite $\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ admet L pour limite.
> Si $L < 1$, alors la série $\sum u_n$ converge,
> Si $L > 1$, alors la série $\sum u_n$ diverge grossièrement.

Appliquer soigneusement ce théorème (en particulier, n'oubliez pas que la suite (u_n) que vous définissez doit être à termes réels strictement positifs) pour étudier le rayon de convergence de la série $\sum \dfrac{n}{3n+1} z^n$.

➢ **Bilan**
Écrire une synthèse sur le rayon de convergence d'une série entière.
Travailler les démonstrations de la définition 1, proposition 3 et proposition 7 du poly.

III. Fonction somme d'une série et exponentielle complexe

Soit (a_n) une suite réelle ou complexe. On considère la série entière $\sum a_n x^n$, pour $x \in \mathbb{R}$. On note R son rayon de convergence et S sa fonction somme, $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

➢ Rappeler les propriétés de la fonction somme S :
➙ Son domaine de définition est ...

➙ Elle est à valeurs dans ...

➙ La fonction S est continue sur ...

➙ Elle est dérivable sur ... et $\forall x \in \dots$, $S'(x) = \dots$

➙ Elle admet pour primitive ... sur le domaine ...

➢ On considère la série $\sum x^n$.
Déterminer sa fonction somme (avec son domaine de définition) et en donner une expression simple.

Déterminer sa dérivée : d'abord sous forme d'une fonction somme de série entière, puis en donnant une expression simple.

Déterminer sa primitive qui vaut 1 en 0 : d'abord sous forme d'une fonction somme de série entière, puis en donnant une expression simple.

➢ On considère la série entière $\sum \frac{(-1)^n}{n+1} x^n$.

Quel est le rayon de convergence de cette série entière ?
Déterminer une expression simple de la fonction somme de la série (en précisant le domaine de validité).

➢ Pour chacune des séries entières suivantes, donner son rayon de convergence et un expression simple de sa fonction somme sur un domaine à préciser.

➙ $\sum 2^n x^n$

➙ $\sum 2nx^{2n-1}$

➙ $\sum nx^{2n}$

➙ $\sum \frac{x^{2n}}{n!}$

➙ $\sum \frac{x^n}{n}$

➙ $\sum \frac{x^{2n}}{n+1}$

➙ $\sum (n+2)x^n$

➙ $\sum n^2 x^n$

➢ **Bilan**

➙ Écrire une synthèse sur la fonction somme d'une série entière.
Travailler les démonstrations de proposition 7 et proposition 10 du poly.
avoir une bonne maitrise des exemples 3 et 4 p. 5.

➙ Travailler le paragraphe sur l'exponentielle complexe (p.8)

IV. Fonctions développables en série entière

➢ Soit $f : I \to \mathbb{K}$ où I est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ contenant 0.

On dit que f est développable en série entière autour de 0 s'il existe une série entière $\sum a_n x^n$ de rayon de convergence $R \neq 0$ et un réel $r \in]0, R[$ tels que $\forall x \in]-r, r[,\ f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

➢ Des développements usuels

1. $f : x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$ est DSE autour de 0 car $\forall x \in]-1,1[,\ f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}$

2. $f : x \mapsto \ln(1+x)$ est DSE autour de 0 car $\forall x \in]-1,1[,\ f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}$

3. $f : x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$ est DSE autour de 0 car $\forall x \in]-1,1[,\ \dfrac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty}$

4. $f : x \mapsto \arctan x$ est DSE autour de 0 car $\forall x \in]-1,1[,\ \arctan x = \sum_{n=0}^{+\infty}$

5. $x \mapsto \ln(1-x)$ est DSE(0) et $\forall x$

6. $x \mapsto e^x$ est DSE(0) et $\forall x$

7. $x \mapsto \cos x$ est DSE(0) et $\forall x$

8. $x \mapsto \sin x$ est DSE(0) et $\forall x$

9. $x \mapsto (1+x)^\alpha$ est DSE(0) et $\forall x$

10. $x \mapsto \sqrt{1+x}$ est DSE(0) et $\forall x$