I. Limite, continuité et dérivation partielle

On se donne f une fonction définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Et $l \in \mathbb{R}$.

- Donner la définition de " f a l pour limite en $a \in U$" :

  $\forall \varepsilon \ldots$

  Notation :

- On considère $f : (x, y) \mapsto \dfrac{x}{x^2 + y^2}$. Donner les deux applications partielles de f en $(0,0)$.

- On pose $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

  1. $f : \begin{array}{ccc} U & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & \dfrac{x^2 + xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} \end{array}$. Déterminer si f admet une limite en $(0,0)$.

  2. $f : \begin{array}{ccc} U & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & \dfrac{x + y}{x^2 + y^2} \end{array}$. Justifier que f n'admet pas de limite en $(0,0)$.

- Citer les deux résultats du cours que vous avez utilisés à la question précédente (les mémoriser pour le prochain cours) :

  propriété ...

  propriété ...

- Donner la définition de " f admet une dérivée partielle d'ordre 1 par rapport à x en $(0,0)$ ".

  Donner la définition de " f admet une dérivée partielle d'ordre 1 par rapport à y en $(0,1)$ ".

II. Fonctions de classe C^1 sur un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

On se donne f une fonction définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

➢ Donner la définition de " f est de classe C^1 sur U, ouvert de $\mathbb{R}^2$".

➢ On considère $f : (x,y) \mapsto \begin{cases} \dfrac{x^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Montrer que f est de classe C^1 sur $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

-

-

Donc ...

Cette fonction f admet-elle des dérivées partielles en $(0,0)$?

➢ Énoncer la formule de Taylor-Young à l'ordre 1, en $a \in \mathbb{R}$, pour une fonction $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

➢ Énoncer la formule de Taylor-Young à l'ordre 1, en $a = (\alpha, \beta) \in U$, pour la fonction $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, f étant supposée de classe C^1 sur U :
$\forall u = (x,y) \in U, \quad f(u) = \dots$

➢ Je rappelle la **règle de la chaîne**, pour g définie par $\forall t \in \mathbb{R},\ g(t) = f(x(t), y(t))$ avec x et y des fonctions de classe C^1 de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $f : (x,y) \mapsto f(x,y)$ une fonction de classe C^1 dans $\mathbb{R}^2$.
g est alors de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et $\boxed{\forall t \in \mathbb{R}, \quad g'(t) = x'(t)\frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t)) + y'(t)\frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t))}$.

➙ Soit $g : t \mapsto f(1-t, 2t)$ avec $f : (x,y) \mapsto f(x,y)$ une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.
Donner l'expression de la dérivée de g en fonction des dérivées partielles de f.

➢ Rappelez la règle de la chaîne, pour g définie par $\forall (u,v) \in \mathbb{R}^2,\ g(u,v) = f(x(u,v), y(u,v))$ avec x et y des fonctions de classe C^1 de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ et $f : (x,y) \mapsto f(x,y)$ une fonction de classe C^1 dans $\mathbb{R}^2$.
g est alors de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ et

$$\boxed{\forall (u,v) \in \mathbb{R}^2, \quad \frac{\partial g}{\partial u}(u,v) = \dots}$$

➙ Soit $g : (u,v) \mapsto f(u-v, u+v)$ avec $f : (x,y) \mapsto f(x,y)$ une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.
Donner l'expression des dérivées partielles de g en fonction des dérivées partielles de f.

III. Fonctions de classe C^2 sur un ouvert de $\mathbb{R}^2$, extremums.

➢ Donner la définition de "f est de classe C^2 sur U, ouvert de $\mathbb{R}^2$".

➢ Montrer que $f\ :\ (x,y) \mapsto x^2 + xy + y^2 + 2x + 3y$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$.

➢ Énoncer la formule de Taylor-Young à l'ordre 2, en $a = (\alpha, \beta) \in U$, pour une fonction $f\ :\ U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, supposée de classe C^2 sur U :
$\forall h = (h_1, h_2) \in U, \quad f(a+h) = f(a) + \dots$

➢ Chercher les points critiques de $f\ :\ (x,y) \mapsto x^2 + xy + y^2 + 2x + 3y$.

➢ Déterminer si les points critiques trouvés sont des extremums locaux de f.