I. Isométries d'un espace E euclidien

E est un $\mathbb{R}-$espace vectoriel de dimension finie, muni d'un produit scalaire $<\cdot,\cdot>$.

1. Rappeler la défintion d'une isométrie de E, (en précisant la nature de l'objet défini)
Une isométrie de E c'est ....

2. Énoncer trois caractérisations d'une E :
Soit $f \in L(E)$.
➙ f est une isométrie si et seulement si ...

➙ f est une isométrie si et seulement si ...

➙ f est une isométrie si et seulement si ...

3. *Premiers exemples*
Les applications suivantes sont-elles des isométries ? (Justifier votre réponse).

- Dans $\mathbb{R}^2$, muni de sa base canonique (e_1, e_2), f est l'application linéaire définie par $f(e_1) = e_1 + e_2$ et $f(e_2) = -e_1 + e_2$.
- f est l'application linéaire canoniquement associée à $A = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.
- Dans $M_n(\mathbb{R})$, muni de son produit scalaire canonique, on définit $f : M \mapsto M^T$.
- Dans $\mathbb{R}_n[X]$, muni du produit scalaire $(P,Q) \mapsto <P,Q> = \displaystyle\int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\,dt$, on considère $f : P \mapsto P'$.

4. Vrai ou Faux ?

- Une isométrie est une application linéaire bijective.
- Une symétrie est une isométrie.
- Un projection orthogonale est une isométrie.
- Si $\det(f) = 1$ alors f est une isométrie.
- Une isométrie admet 1 pour valeur propre.

5. Soit f un endomorphisme de E et A sa matrice dans une base $\mathscr{B}$ orthonormée de E.
On suppose que $\forall x,\ y \in E,\ < f(x), f(y) >=< x, y >$.
➙ Traduire matriciellement la propriété de f (on notera X et Y les vecteurs colonnes des coordonnées de x et y dans $\mathscr{B}$).
➙ Montrer que $\forall Y \in M_{n,1}\mathbb{R}),\ (A^T A)Y = 0$.
➙ En déduire que A est orthogonale.

6. *De quoi on parle ?*
Rappeler les définitions de $O(E)$, de $SO(E)$, de $O(n)$, de $SO(n)$. Que désignent E et n ?

II. Groupe orthogonal en dimension 2

E est un $\mathbb{R}-$espace vectoriel de dimension 2, muni d'un produit scalaire noté $< \cdot, \cdot >$.

1. *Description des matrices orthogonales*
Soit M une matrice de $O(2)$. Donner les formes possibles de M : il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que ...

2. *Description des isométries de* $\mathbb{R}^2$
Soit f une isométrie de E. On suppose que E est orienté.
f peut être une rotation et dans ce cas, pour la caractériser, il faut trouver ...

f peut être une   et dans ce cas, pour la caractériser, il faut trouver ...

3. *Rotations du plans*
Complétez la propriété suivante (propriété 10, page 5).

Soit E un $\mathbb{R}-$espace vectoriel de dimension 2 <u>orienté</u>. Soit $r \in SO(E)$, $\theta \in [0, 2\pi[$ tel que dans orthonormée   de E, la matrice de r est $R(\theta)$. On dit que r est une rotation d'angle θ.

4. Soit r un élément de $SO(E)$.
➙ que pouvez-vous dire de $\det(r)$?

➙ On prend (i, j) une base orthonormée directe de E. Que pouvez-vous dire de la matrice R de r dans cette base ?

➙ Donner la matrice $\text{Mat}_{(j,i)}(r)$.

➙ On dit que r est une rotation. Avec les notations que vous avez prises pour donner les matrices, quel est son angle ? Illustrez ceci sur un schéma.

5. Soit f un élément de $O(E)$ dont la matrice dans une base $\mathscr{B} = (i, j)$ orthonormée directe est $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$.

➙ Justifier que $a^2 + b^2 = 1$.

➙ On pose $u = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(i - j)$. Déterminer v tel que (u, v) soit une base orthonormée directe.

➙ Déterminer la matrice de f dans la base (u, v) puis dans la base $(-u, v)$.

6. On se place dans $\mathbb{R}^2$ muni de sa base canonique (i, j).

➙ Rappeler $i =$ et $j =$

➙ Soit s la symétrie orthogonale par rapport à la droite Δ dirigée par le vecteur $a = -2i + j$. On pose $b = i + 2j$.
Déterminer un vecteur de norme 1 dirigeant Δ.
Donner la matrice de s dans la base (a, b) puis dans la base (i, j).

III. Groupe orthogonal en dimension 3

E est un $\mathbb{R}-$espace vectoriel de dimension 3, muni d'un produit scalaire noté $<\cdot,\cdot>$.

1. *Description des isométries*

➙ Soit f une isométrie de E. D'après le cours, il **existe** une base orthonormée de E dans laquelle la matrice de f est de la forme (deux formes à donner) :

Traduction matricielle de ce qui précède :
Soit M une matrice de $O(3)$.
D'après le cours, il **existe** deux matrices et telles que $M = \dots$.

2. *Description des isométries de* $\mathbb{R}^3$

Soit f une isométrie de E.

f peut être une rotation et dans ce cas, pour la caractériser, il faut trouver ...

f peut être une et dans ce cas, pour la caractériser, il faut trouver ...

f peut être une et dans ce cas, pour la caractériser, il faut trouver ...

➢ Soit Δ la droite d'équations $x = y = z$ dans un repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ orthonormé direct. Soit r la rotation vectorielle de E, d'axe Δ et d'angle $\dfrac{\pi}{4}$. Déterminer la matrice de r dans la base $(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$.

➢ Soit $f \in L(\mathbb{R}^3)$ et $A \in M_3(\mathbb{R})$ la matrice représentant f dans la base canonique.
➙ On suppose que A est orthogonale. Que peut-on en déduire sur la nature de f ?

➙ On sait que $\ker(A - I_3) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$. Que peut-on en éduire sur la nature de f ?

➙ Que vaut le déterminant de f ?

➙ On considère le vecteur $\vec{u} = (0,1,1)$ et le vecteur $\vec{a} = (2,1,-1)$.
On sait que $f(\vec{u}) = \dfrac{1}{2\sqrt{3}}(2, \sqrt{6}-2, \sqrt{6}+2)$.
En déduire le dernier élément caractérisant f (on pourra remarquer que $\vec{u}$ et $\vec{a}$ sont orthogonaux).

➢ Soit $f \in L(\mathbb{R}^3)$ et $A \in M_3(\mathbb{R})$ la matrice représentant f dans la base canonique.
On sait que f est une isométrie et que $\det(f) = -1$. De plus, on sait que 1 est valeur propre de f.
➙ Que peut-on en déduire sur la nature de f et sur le sous-espace propre associé à 1 ?

➙ On sait que $f(0,1,1) = (0,1,1)$ et que $f(2,-1,1) = (-2,1,-1)$.
En déduire l'élément caractérisant f.