# I. Produit scalaire

$E$ est un $\mathbb{R}-$espace vectoriel.

➢ Un produit scalaire sur $E$ c'est .... *quel objet ?*

➢ Énoncer les trois propriétés d'un produit scalaire sur $E$ :

•

•

•

➢ Donner un exemple de produit scalaire dans les espaces suivants :

• Dans $\mathbb{R}^4$, pour $u,\ v$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^4$,
$< u, v >= \dots$

• Dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ :

• Dans $C^0([0,1],\mathbb{R})$ :

• Dans $\mathbb{R}_n[X]$ :

➢ Énoncer l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

## II. Orthogonalité, procédé de Gram-Schmidt

$E$ est un $\mathbb{R}-$espace vectoriel, muni d'un produit scalaire noté $<\cdot,\cdot>$.

➢ *Vecteurs et famille orthogonales.*

• "deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux" signifie

• "une famille de vecteurs $(\vec{u}_1, \overrightarrow{u_2}, \dots, \overrightarrow{u_k})$ est orthogonale" signifie

• "une famille de vecteurs $(\vec{u}_1, \overrightarrow{u_2}, \dots, \overrightarrow{u_k})$ est orthonormale" signifie

➢ Le **procédé de Gram-Schmidt** permet de passer d'une famille libre de $E$ en une famille orthonormée de $E$, en conservant les sous-espaces engendrés par les vecteurs de la famille initiale.

• On considère $(e_1, e_2, e_3)$ une famille libre de $E$.
Donnez les étapes du procédé pour construire une famille orthonormée $(f_1, f_2, f_3)$ telle que $\text{Vect}(f_1) = \text{Vect}(e_1)$, $\text{Vect}(f_1, f_2) = \text{Vect}(e_1, e_2)$, $\text{Vect}(f_1, f_2, f_3) = \text{Vect}(e_1, e_2, e_3)$.

➙

➙

➙

• Soit $\mathbb{R}_2[X]$ muni du produit scalaire $< P, Q >= \sum_{k=0}^{2} P(k)Q(k)$.
La famille $(1, X, X^2)$ est-elle orthonormée pour ce produit scalaire ?

Déterminer une base orthonormée de $\mathbb{R}_2[X]$.

➢ *Expression matricielle du produit scalaire*

• Soient $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ et $\vec{y} = (y_1, y_2, y_3, y_4)$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^4$ (muni du produit scalaire usuel).

Donner l'expression matricelle du produit scalaire $< \vec{u}, \vec{v} >$ (pour cela on notera $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}$.

➢ Soient $A = 1 + 2(X-1) = 2X - 1$ et $B = \sqrt{3}(X-1)^2 = \sqrt{3}X^2 - 2\sqrt{3}X + \sqrt{3}$ deux polynômes de $\mathbb{R}_2[X]$.
On munit $\mathbb{R}_2[X]$ du produit scalaire $(P,Q) \mapsto < P,Q >= \sum_{k=0}^{2} P(k)Q(k)$.

• Montrer que la famille $\mathscr{C} = (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{2}}(X-1), \sqrt{\frac{3}{2}}((X-1)^2 - \frac{2}{3})$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

• Vérifier que les coordonnées de $A$ et $B$ dans cette base $\mathscr{C}$ sont $(\sqrt{3}, 2\sqrt{2}, 0)$ pour $A$ et $(2, 0, \sqrt{2})$ pour $B$.

• Voici deux calculs proposés pour le produit scalaire $< A, B >$ : lequel est correct et pourquoi ?

Premier calcul : $< A, B >= X^T Y = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ -2\sqrt{3} \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} = -\sqrt{3} - 4\sqrt{3} = -5\sqrt{3}$.

Deuxième calcul : $< A, B >= X^T Y = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 2\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} = 2\sqrt{3}$.

## III. L'orthogonal d'un sous espace et projection orthogonale

$E$ est un $\mathbb{R}-$espace vectoriel, muni d'un produit scalaire noté $< \cdot, \cdot >$.

➢ Le mot **orthogonal** s'utilise pour différents objets. Expliquez le sens de ce mot :

• un vecteur $\vec{u}$ est orthogonal à un sous-espace $F$ signifie

• deux sous-espaces $F$ et $G$ sont orthogonaux signifie

• un sous-espace $G$ est l'orthogonal d'un sous-espace $F$ signifie

➢ **En dimension finie**, soit $F$ un sous-espace d'un espace $E$ de dimension finie.

• l'orthogonal de $F$ est un ... de $F$ dans $E$

• Dans $\mathbb{R}^3$ muni de son produit scalaire usuel, on note $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ 2x - y + 3z = 0\}$.

➙ Quelle est la dimension de $F^\perp$ ?

➙ Montrer que $(2, -1, 3)$ est un vecteur de $F^\perp$

➙ En déduire $F^\perp$.

• Soit $(e_1, \dots, e_p)$ une base de $F$.

1. on peut décrire l'orthogonal de $F$ par $F^\perp = \{u \in E \ / \ \forall i \in [\![1, p]\!], < u, e_i >= 0\}$.

2. Si $(e_1, \dots, e_p)$ est orthonormée de $F$, on la complète en une base orthnormée $(e_1, \dots, e_n)$ de $E$, et alors on a $F^\perp = \text{Vect}(e_{p+1}, \dots, e_n)$.

On considère $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire usuel.

➙ Utilisez l'affirmation 1. pour trouver l'orthogonal de $F = \text{Vect}(\ (1, 1, 1), (-1, 2, 1))$.

➙ Utilisez l'affirmation 2. pour trouver l'orthogonal de $G = \text{Vect}(\ (1, 2, 1))$.

Pour la suite du paragraphe : $E$ est un $\mathbb{R}-$espace vectoriel, muni d'un produit scalaire noté $< \cdot, \cdot >$.
$F$ désigne un sous-espace vectoriel de **dimension finie** de $E$.

➢ *Projection / projecteur orthogonal(e)*

• La projection orthogonale sur $F$ est la projection sur $F$ parallèlement à ....

• un projecteur orthogonal est un projecteur de $E$ (endomorphisme $p$ de $E$ tel que $p \circ p = p$), tel que ...

• Soit $(e_1, \dots, e_p)$ une base **orthonormée** de $F$, et $p$ la projection orthogonale sur $F$.
Pour tout vecteur $x$ de $E$, on connaît une expression de $p(x)$ :
$p(x) = \sum_{k=1}^{p}$

• la distance de $x$ à $F$ est donnée par $d(x, F) = \dots$.

• faire un dessin pour illustrer la notion de distance d'un vecteur à un sous-espace vectoriel.

**Exercice 1**

Dans $\mathbb{R}^4$ muni du produit scalaire usuel, on considère $H = \{(x, y, z, t) \ / \ 2x - y + 2t = 0\}$. On note $p$ la projection orthogonale sur $H$. Déterminer une expression de $p(u)$ pour $u$ un vecteur de $\mathbb{R}^4$.

**Exercice 2**: Dans $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique,
on pose $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ 2x - y + 2z = 0\}$. On note $p$ la projection orthogonale sur $F$.
Déterminer une base orthonormée $\mathscr{B}'$ de $\mathbb{R}^3$ adaptée à la décomposition $F \oplus F^{\perp} = \mathbb{R}^3$. Déterminer la matrice de $p$ dans $\mathscr{B}'$, puis la matrice de $p$ dans la base canonique $\mathscr{B}$.

## IV. Matrices orthogonales et matrices symétriques

➢ Donner la définition d'une matrice orthogonale : *quel objet ?*

Donner la définition d'une matrice symétrique :

➢ Expliquer comment reconnaî tre une matrice orthogonale :

• à partir de ses vecteurs colonnes :

• à partir de ses vecteurs lignes :

➢ Dans $E$, espace euclidien, on considère deux bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$.

Les matrices de passage d'une base **orthonormée** à une autre base **orthonormée** d'un espace euclidien sont des matrices orthogonales.

Expliquer l'intérêt de chercher des bases orthonormées lorsque l'on diagonalise une matrice.

➢ Énoncer le **théorème spectral**

**Exercice 3**: Soit $A = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & 4 & -8 \\ 4 & 7 & 4 \\ -8 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

Vérifier que $A$ est dans $O(3)$ puis calculer le déterminant de $A$.

Montrer que $A$ est la matrice d'une symétrie $s$ de $\mathbb{R}^3$. Prouver que $s$ est une symétrie orthogonale.

**Exercice 4**: Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Justifier que $A$ est diagonalisable.

➢ $\boxed{\text{Bilan}}$ Le mot **orthogonal** s'utilise pour différents objets. Expliquez le sens de ce mot :

• deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux signifie

• un vecteur $\vec{u}$ est orthogonal à un sous-espace $F$ signifie

• deux sous-espaces $F$ et $G$ sont orthogonaux signifie

• une famille de vecteurs $(\vec{u}_1, \overrightarrow{u_2}, \ldots, \overrightarrow{u_k})$ est orthogonale signifie

• un sous-espace $G$ est l'orthogonal d'un sous-espace $F$ signifie

• soit $p$ un projecteur de $E$, on rappelle que cela signifie que $p$ est un endomorphisme de $E$ tel que $p \circ p = p$.
Un projecteur $p$ est orthogonal siginifie

• soit $s$ une symétrie de $E$, cela signifie que ...

Une symétrie $s$ est orthogonale siginifie

• une matrice $A$ est orthogonale signifie :