Question 1 :

Synthèse des définitions : préparer une synthèse des définitions des éléments propres (valeurs propres, vecteurs propres et sous-espaces propres).

Cette synthèse doit reprendre les définitions (penser à préciser le cadre de travail), éventuellement les relier, éventuellement proposer des exemples. Vous pouvez inclure des questions si certaines notions ne sont pas encore comprises.

Question 2 :

Première démonstration : travaillez la démonstration de la proposition 1.

Question 3 :

Cas de la dimension finie : on se place dans un espace vectoriel de dimension finie n.

On considère f un endomorphisme de E.

Quelles sont les conséquences (de la dimension finie) sur les éléments propres de f ?

Question 4 :

Et pour les matrices ? : faire une synthèse des définitions des éléments propres pour les matrices.

Cette synthèse doit reprendre les définitions (penser à préciser le cadre de travail), éventuellement les relier aux notions pour les endomorphismes, éventuellement proposer des exemples.

Vous pouvez inclure des questions si certaines notions ne sont pas encore comprises.

Question 5 :

Deuxième démonstration : travaillez la démonstration de la proposition 2.

Question 6 :

Polynôme caractéristique : faire une synthèse sur le polynôme caractéristique.

Cette synthèse doit reprendre la définition et les principales propriétés de ce polynôme. Vous pouvez inclure des questions.

Question 7 :

Troisième démonstration : travaillez la démonstration de la proposition 4.

Correction de l'exercice 1 du poly

1. On travaille dans $\mathbb{R}^2$ qui est de dimension 2. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. L'application $f - \lambda \mathrm{Id}_E$ est bijective si et seulement si $\det(f - \lambda \mathrm{Id}_E) \neq 0$. On détermine $\det(f - \lambda \mathrm{Id}_E)$ en considérant la matrice de cette application dans la base $\mathscr{B}$. On trouve $\det(f - \lambda \mathrm{Id}_E) = (2-\lambda)(1-\lambda)$. On en déduit que $f - \lambda \mathrm{Id}_E$ est bijective si et seulement si $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{1, 2\}$. Les valeurs propres de f sont 1 et 2.

2. On prend une matrice symétrique non nulle, on a alors $f(M) = M$ donc 1 est valeur propre de f.
On prend une matrice antisymétrique non nulle (en proposer une), on a alors $f(M) = -M$ donc -1 est valeur propre de f.

3. On fixe $\lambda \in \mathbb{R}$ et on cherche s'il existe un y non nul (donc une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui n'est pas la fonction nulle), telle que $f(y) = \lambda y$. On cherche donc y, de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, telle que $y' = \lambda y$.
On sait que la fonction $t \mapsto e^{\lambda t}$ est une solution de cette équation différentielle. Et cette fonction n'est pas la fonction nulle. Donc λ est une valeur propre de f.
Donc tous les réels sont des valeurs propres de f, $\mathrm{Sp}(f) = \mathbb{R}$.

Exercice TCalg3. 1
Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}[X])$ définie par $f(P) = XP(X)$. Déterminer le spectre de f.

Exercice TCalg3. 2
On pose f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $f(1, -2, -1)$. Peut-on en déduire que 0 est une valeur propre de f ?

2. On a trouvé $u \in \mathbb{R}^3$ tel que $f(u) = 2u$. Peut-on en déduire que 2 est valeur propre ?

3. On remarque que en prenant $u = 0$ on a $f(u) = 5u$. Peut-on en déduire que 5 est valeur propre ?

4. Déterminer les valeurs propres de f.

Exercice TCalg3. 3
Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dont la matrice dans la base canonique est $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Déterminer les valeurs propres de f.
Déterminer le sous-espace propre de f associé à la valeur propre 1.
On remarque que $f(1, -1) = (-1, 1)$. Que peut-on en déduire ?

Exercice TCalg3. 4
Soit $A = \dfrac{1}{14} \begin{pmatrix} -11 & 6 \\ 9 & 4 \end{pmatrix}$. On pose $U_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $U_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

1. Calculer AU_1 et AU_2.

2. Montrer que -1 et $\dfrac{1}{2}$ sont des valeurs propres de A.

3. Justifier que (U_1, U_2) forme une base de $\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$.

4. Justifier que A n'a pas d'autre valeur propre que les deux trouvées.