I. Définition, vocabulaire, notations

1. Définitions

Définition 1 : On appelle **suite réelle** (resp. complexe), toute application u de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$ (resp. dans $\mathbb{C}$).

On parle de *suite indexée par* $\mathbb{N}$ et on note u, (u_n) ou $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
On dit que u_n est son *terme général.*
L'ensemble des suites réelles (resp. complexe) est $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ (resp. $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$).
On travaillera aussi avec des suites u définies de $[N,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$. On notera alors $(u_n)_{n\geq N}$.

Définition 2 : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles ou complexes. On appelle
- *somme* de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de terme général u_n+v_n.
- *produit* de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de terme général u_nv_n.
- *produit de* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *par un scalaire* $\lambda\in\mathbb{K}$ la suite de terme général λu_n.

On note $\mathbb{K}$ pour $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On munit ainsi $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ d'une structure de $\mathbb{K}-$espace vectoriel et d'anneau.

2. Vocabulaire

On définit le vocabulaire associé :

- (u_n) est constante : $\exists C\in\mathbb{R},\ \forall n\in\mathbb{N},\quad u_n=C$.
- (u_n) est stationnaire : $\exists C\in\mathbb{R},\ \exists N\in\mathbb{N},\ \forall n\in\mathbb{N},\quad n\geq N \Longrightarrow u_n=C$.
- (u_n) est **positive** (resp. *négative*) si $\forall n\in\mathbb{N}\quad u_n\geq 0$ (resp. $u_n\leq 0$).
- (u_n) est **bornée** si il existe $K\in\mathbb{R}_+$ tel que : $\forall n\in\mathbb{N}\quad |u_n|\leq K.$ (comprendre module ou valeur absolue suivant les cas.)

Pour les suites réelles, on ajoute

- (u_n) est **croissante** (resp. strictement) si $\forall n\in\mathbb{N}\quad u_n\leq u_{n+1}$ (resp. $u_n<u_{n+1}$),
  et (u_n) est décroissante.
- (u_n) est **majorée** si il existe $M\in\mathbb{R}$ tel que $\forall n\in\mathbb{N}\quad u_n\leq M$, et (u_n) est minorée.

À partir d'un certain rang : On utilisera l'expression "à partir d'un certain rang", lorsqu'une propriété est vraie pour tous les termes de la suite sauf pour les premiers. Par exemple, on dira que "$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est positive à partir d'un certain rang" si il existe $N\in\mathbb{N}$ tel que pour tout $n\geq N$, $u_n\geq 0$. Les N premiers termes ne sont pas forcément positifs, mais c'est le comportement pour n grand qui nous intéresse !

3. Limite

Définition 3 : Soit (u_n) une suite réelle ou complexe.
On dit que (u_n) admet pour limite $l\in\mathbb{K}$ si $\forall\epsilon>0,\ \exists N\in\mathbb{N},\ \forall n\geq N,\ |u_n-l|\leq\epsilon$.

Pour les suites réelles, on étend cette définition à une limite égale à $+\infty$ ou $-\infty$.
Si la limite d'une suite existe, on montre qu'elle est **unique**. On note $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=l$ ou $u_n\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}l$.
Dans ce cas, on dit que (u_n) converge vers $l\in\mathbb{K}$. Si une suite n'a pas de limite, ou si elle a $\pm\infty$ pour limite, on dit qu'elle diverge. **Étudier la nature** d'une suite c'est étudier sa convergence.

4. Suites usuelles

Suites arithmétiques et géométriques, suites arithmético-géométriques.
Suites définies par une relation de récurrence linéaire double.
Suites définies par récurrence. Suites définies implicitement.

II. Principaux théorèmes

1. Propriétés des suites ayant une limite

- Une suite (réelle ou complexe) convergente est bornée.
- Si les suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent et à partir d'un certain rang $u_n \leq v_n$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \leq \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.
- Si une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel $l > 0$ alors à partir d'un certain rang, $u_n > 0$.

2. Suites extraites

Définition 4 : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle ou complexe.
On appelle suite extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ toute suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour laquelle il existe une application φ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$, strictement croissante, telle que $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = u_{\varphi(n)}$.

Explication : $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est formée de termes de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'indices strictement croissants.
Deux exemples fondamentaux : les suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont des suites extraites de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Proposition 1

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite l alors toute suite extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l.

Remarque 1 :

- on utilise souvent la contraposée de ceci (pour montrer qu'une suite n'a pas de limite).
- on peut montrer (en revenant à la définition de la limite), que si les deux suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers un même l, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l.

Les théorèmes suivants sont des théorèmes d'existence.

3. Opérations sur les limites

On sait trouver en général la limite d'une somme, d'un produit ou d'un quotient de suites. Il y a quelques cas de formes indéterminées que l'on saura soulever grâce aux équivalents ou aux développements asymptotiques.

On pourra utiliser les comparaisons usuelles :

Soient $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha < \beta$, on a $n^\alpha = o(n^\beta)$.

Soient $a,\ b \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $a < b$, on a $a^n = o(b^n)$.

Soient $a > 1$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, on a $n^\alpha = o(a^n)$.

Soient $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$ tels que $0 < \alpha$, on a $(\ln n)^\beta = o(n^\alpha)$.

On a $e^n = o(n!)$ et $n! = o(n^n)$.

Dans le cas des suites complexes, on utilisera souvent :

Proposition 2 Soit (z_n) une suite complexe et $l \in \mathbb{C}$.
Les assertions suivantes sont équivalentes :

1) $\lim\limits_{n\to+\infty} z_n = l$.
2) $\lim\limits_{n\to+\infty} |z_n - l| = 0$.
3) les suites $(\mathrm{Re}(z_n))$ et $(\mathrm{Im}(z_n))$ sont convergentes respectivement vers $(\mathrm{Re}(l))$ et $(\mathrm{Im}(l))$.

4. Théorème d'encadrement

Proposition 3

Soit (u_n) une suite (réelle ou complexe) bornée et (α_n) une suite (réelle ou complexe) qui converge vers 0.
Alors le produit $(\alpha_n u_n)$ est une suite qui converge vers 0

démo

Proposition 4

Soient (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites réelles telles que,
à partir d'un certain rang N, on a $\forall n \geq N,\ v_n \leq u_n \leq w_n$.
Si (v_n) et (w_n) convergent vers un même réel l alors (u_n) converge vers l.

On peut aussi énoncer des versions avec limite infinie : dans ce cas, une seule inégalité (la bonne) suffit pour conclure.

5. Théorème de la limite monotone

Proposition 5

Soit (u_n) une suite réelle croissante.

- Si (u_n) est majorée alors (u_n) converge (et de plus, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \sup\{u_n,\ n \in \mathbb{N}\}$).
- Si (u_n) n'est pas majorée alors (u_n) tend vers $+\infty$.

On peut énoncer un théorème similaire pour des suites décroissantes (et la discussion porte sur minorée ou non minorée).
Dans tous les cas, on retiendra que **une suite monotone admet une limite**.

6. Suites adjacentes

Définition 5 : On dit que les suites réelles (u_n) et (v_n) sont adjacentes si l'une d'elle est croissante et l'autre décroissante, et si $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n - v_n) = 0$.

Proposition 6

Deux suites adjacentes sont convergentes et ont même limite.

Ce résultat se démontre en utilisant le théorème de la limite monotone : on montre que la suite croissante est majorée (par le premier terme de l'autre suite) et que la suite décroissante est minorée (par le premier terme de la première...).

III. Comparaison de suites

1. Définitions Soient (u_n), (v_n) des suites réelles ou complexes.

Définition 6 :

- On dit que (u_n) est équivalente à (v_n), et on note $u_n \sim v_n$ si il existe (η_n) telle que $\lim\limits_{n\in\mathbb{N}} \eta_n = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \eta_n v_n$.
- On dit que (u_n) est négligeable devant (v_n), et on note $u_n = o(v_n)$ si il existe (ϵ_n) telle que $\lim\limits_{n\in\mathbb{N}} \epsilon_n = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \epsilon_n v_n$.
- On dit que (u_n) est dominée par (v_n), et on note $u_n = O(v_n)$ si il existe (δ_n) telle que (δ) est bornée et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \delta_n v_n$.

Lorsque (v_n) ne s'annule par à partir d'un certain rang, les définitions précédentes sont équivalentes à :

- $u_n \sim v_n$ si et seulement si $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = 1$
- $u_n = o(v_n)$ si et seulement si $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = 0$
- $u_n = O(v_n)$ si et seulement si $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$ est bornée.