Fiche 1 *Sur le théorème des sommes de Riemann*

Commencer par citer le théorème sur les sommes de Riemann.

Exercice 1

On considère, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \sqrt[n]{2^k}$. Montrer que la suite (S_n) converge.

Indication : reconnaître une somme de Riemann du type $S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(\frac{k}{n})$ *pour une fonction* f *à définir. On justifie ensuite que* f *est continue sur* $[0,1]$ *pour appliquer le théorème.*

Exercice 2 Étudier la convergence des suites :

1. $u_n = \frac{1}{n}\left(\sin\frac{\pi}{n} + \sin\frac{2\pi}{n} + \cdots + \sin\frac{n\pi}{n}\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sin(k\frac{\pi}{n})$.
2. $u_n = \dfrac{1+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n-1}}{n\sqrt{n}} = \dfrac{1}{n\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n-1}\sqrt{k}$.
3. $u_n = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{(1+\frac{1}{n})^2} + \frac{1}{(1+\frac{2}{n})^2} + \cdots + \frac{1}{(1+\frac{n}{n})^2}\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+(\frac{k}{n})^2}$.
4. $u_n = \sum_{k=1}^{n}\dfrac{n+k^2}{n^3+k^3}$.
5. $u_n = \prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n}\right)^{1/n}$

Fiche 2 *Sur le théorème fondamental*

Commencer par citer le théorème fondamental.

Exercice 3

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = x\,\mathrm{sh}(\frac{1}{x})$. Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, on pose $\psi(x) = \int_{x/2}^{x} f(t)\,dt$.
On rappelle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{sh}(2x) = 2\mathrm{ch}(x)\mathrm{sh}(x)$.
Justifier que ψ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\psi'(x) = f(x)\left[1 - \frac{1}{2}\mathrm{ch}(\frac{1}{x})\right]$.

Exercice 4

Pour $f \in C^0(\mathbb{R})$, on considère l'application g définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad g(x) = \frac{1}{2x}\int_{-x}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad g(0) = f(0).$$

1. Rappeler les propriétés de la fonction $F : x \mapsto \int_0^x f(t)\,dt$.
2. Justifier que g est bien définie sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer que g est continue sur $\mathbb{R}$. *Il faut travailler soigneusement en* 0...
4. Montrer que g est paire.

Fiche 3 *Travail sur les inégalités et propriétés de l'intégrale*

Commencer par lister les propriétés principales de l'intégrale sur un segment.

Exercice 5

Montrer que $\dfrac{\int_1^x e^t \ln t\,dt}{e^x \ln x}$ tend vers 1 quand x tend vers $+\infty$.

Indications : On pourra commencer par une intégration par parties pour transformer $\displaystyle\int_1^x e^t \ln t\,dt$*. Puis déterminer un encadrement de* $\displaystyle\int_1^x \frac{e^t}{t}\,dt$*, en utilisant* $\forall\, t \in [1, x]$, $\frac{1}{x} \leqslant \frac{1}{t} \leqslant 1$.

Exercice 6

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue telle que $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{1}{2}$. Montrer qu'il existe $x_0 \in]0,1[$ tel que $f(x_0) = x_0$.

Indication : montrer que la fonction $x \mapsto f(x) - x$ *prend des valeurs positives et négatives, en raisonnant par l'absurde. On utilisera aussi* $\displaystyle\int_0^1 f(x) - x\,dx$.

Exercice 7 *30 minutes*

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $K_n = \displaystyle\int_0^{\pi/4} \tan^n x\,dx$.

1. Justifier l'existence de K_n. Calculer K_0 et K_1.
2. Déterminer le réel $K_n + K_{n+2}$ en fonction de n.
3. Démontrer que la suite (K_n) est monotone et étudier sa limite.
4. Déterminer, en fonction de $p \in \mathbb{N}$, le réel K_{2p+3}.
   En déduire l'étude de la limite de la série harmonique alternée (S_n), avec

$$S_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots + (-1)^{k-1}\frac{1}{k} + \cdots + (-1)^p \frac{1}{p+1}$$

Exercice 8 *Banque PT 2018 - C- Préambule*

On considère deux réels a et b tels que $a < b$, et une fonction f, de classe C^1 sur $[a,b]$.

1. Montrer qu'il existe une constante positive M telle que, pour tout réel t de $[a,b]$: $|f'(t)| \leqslant M$.
2. Que vaut : $\displaystyle\lim_{k\to+\infty, k\in\mathbb{N}} \frac{1}{k}\int_a^b f'(t)e^{ikt}\,dt$?
3. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que : $\displaystyle\lim_{k\to+\infty, k\in\mathbb{N}} \int_a^b f(t)e^{ikt}\,dt = 0$.

Fiche 4 *Entrainement au calcul*

Exercice 9

Déterminer une primitive de chacune des fonctions suivantes, ainsi qu'un intervalle de validité.

1. $x \mapsto \dfrac{1}{3x+2}$
2. $x \mapsto e^{2x+1}$
3. $x \mapsto e^{(1-i)x}$
4. $x \mapsto \sin^3 x$
5. $x \mapsto \dfrac{x-1}{x}$
6. $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
7. $x \mapsto \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$
8. $x \mapsto e^{-x}\sin(3x)$
9. $x \mapsto \dfrac{1}{(2x+3)^2}$
10. $x \mapsto \dfrac{1}{(x+4)(x-1)}$
11. $x \mapsto \dfrac{1}{(2x+1)^2+2}$
12. $x \mapsto \dfrac{1}{3x^2-5x-2}$
13. $x \mapsto \dfrac{1}{x^2+2x+2}$
14. $x \mapsto \ln(2x+1)$
15. $x \mapsto \dfrac{x}{2x^2+1}$
16. $x \mapsto \dfrac{1}{e^x-1}$
17. $x \mapsto \dfrac{\sin x}{1+\cos x}$
18. $x \mapsto \dfrac{1}{(1-x)\sqrt{x}}$
19. $x \mapsto \dfrac{2x^2}{x^2+1}$
20. $x \mapsto \dfrac{x}{x^2+x+1}$
21. $x \mapsto \dfrac{2}{\cos^2 x}$
22. $x \mapsto e^{2x}\cos(x)$
23. $x \mapsto \dfrac{x}{4-x^2}$
24. $x \mapsto \dfrac{3x^2}{1-x}$
25. $x \mapsto \dfrac{\cos x}{1+\sin^2 x}$

corrigés

Fiche 1 *Sur le théorème des sommes de Riemann*

Exercice 1

On considère, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \sqrt[n]{2^k}$. Montrer que la suite (S_n) converge.

Indication : reconnaître une somme de Riemann du type $S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(\frac{k}{n})$ *pour une fonction* f *à définir. On justifie ensuite que* f *est continue sur* $[0,1]$ *pour appliquer le théorème.*

$S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} 2^{k/n}$.

Somme de Riemann sur $[0,1]$ avec f $x \mapsto 2^x$.

La fonction f est continue sur $[0,1]$, donc (S_n) converge vers $\int_0^1 f(t)\,dt = \frac{1}{\ln(2)}$.

Exercice 2 Étudier la convergence des suites :

1. $u_n = \frac{1}{n}\left(\sin\frac{\pi}{n} + \sin\frac{2\pi}{n} + \dots + \sin\frac{n\pi}{n}\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sin(k\frac{\pi}{n})$.

   Somme de Riemann sur $[0,1]$ avec f $x \mapsto \sin(\pi x)$.

   La fonction f est continue sur $[0,1]$, donc (u_n) converge vers $\int_0^1 f(t)\,dt = \frac{2}{\pi}$.

2. $u_n = \frac{1+\sqrt{2}+\dots+\sqrt{n-1}}{n\sqrt{n}} = \frac{\sum_{k=1}^{n-1}\sqrt{k}}{n\sqrt{n}}$. $u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\sqrt{\frac{k}{n}} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{\frac{k}{n}}$.

   Somme de Riemann sur $[0,1]$ avec f $x \mapsto \sqrt{x}$.

   La fonction f est continue sur $[0,1]$, donc (u_n) converge vers $\int_0^1 f(t)\,dt = \frac{2}{3}$.

3. $u_n = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{(1+\frac{1}{n})^2} + \frac{1}{(1+\frac{2}{n})^2} + \dots + \frac{1}{(1+\frac{n}{n})^2}\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+(\frac{k}{n})^2}$.

   Somme de Riemann sur $[0,1]$ avec f $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$.

   La fonction f est continue sur $[0,1]$, donc (u_n) converge vers $\int_0^1 f(t)\,dt = \frac{\pi}{4}$.

4. $u_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{n+k^2}{n^3+k^3}$.

   On commence par couper la somme en deux :

   $u_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n^3+k^3} + \sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{n^3+k^3} = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+(k/n)^3} + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{(k/n)^2}{1+(k/n)^3}$.

   ➢ La première somme sécrit $\frac{1}{n} \times S_n$ où S_n est une somme de Riemann sur $[0,1]$ associée à la fonction $f_1 : x \mapsto \frac{1}{1+x^3}$. f_1 est continue sur $[0,1]$, (S_n) converge donc vers $\int_0^1 f(t)\,dt$. Et par conséquent $\left(\frac{1}{n}\times S_n\right)$ converge vers 0.

   ➢ La deuxième somme est une somme de Riemann sur $[0,1]$ associée à la fonction $f_2 : x \mapsto \frac{x^2}{1+x^3}$. Elle converge donc vers $\int_0^1 f(t)\,dt = \frac{\ln 2}{3}$.

   ➢ Donc la suite (u_n) converge vers $\frac{\ln 2}{3}$.

5. $u_n = \prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n}\right)^{1/n}$.

   Considérer $v_n = \ln(u_n)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

   On a alors $v_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)$, et on reconnaît une somme de Riemann associée à la fonction $f : x \mapsto \ln(1+x)$ sur $[0,1]$. f est continue, donc (v_n) converge vers $\int_0^1 \ln(1+t)\,dt$.

   $\int_0^1 \ln(1+t)\,dt = [(1+t)(\ln(1+t)-1)]_0^1 = 2\ln 2 - 1$.

Fiche 2	*Sur le théorème fondamental*

Exercice 3
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = x\mathrm{sh}(\frac{1}{x})$. Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, on pose $\psi(x) = \int_{x/2}^{x} f(t)dt$.
On rappelle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{sh}(2x) = 2\mathrm{ch}(x)\mathrm{sh}(x)$.
Justifier que ψ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\psi'(x) = f(x)\left[1 - \frac{1}{2}\mathrm{ch}(\frac{1}{x})\right]$.

On note F une primitive de f sur $\mathbb{R}_+^*$: celle-ci est bien définie (par exemple par $x \mapsto \int_1^x f(t)\,dt$) car f est continue sur cet intervalle.
Grâce à la relation de Chasles, on peut alors écrire $\psi(x) = F(x) - F(\frac{x}{2})$.
F est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\frac{x}{2}$ est dans $\mathbb{R}_+^*$. *Il y a une composée ici, $F \circ h$ avec $h : x \mapsto \frac{x}{2}$. Ce dont vous devez avoir conscience pour bien dériver.*
Donc ψ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, et on a pour tout $x > 0$, $\psi'(x) = F'(x) - \frac{1}{2}F'(\frac{x}{2})$.
Puisque $F' = f$, on a $\psi'(x) = f(x) - \frac{1}{2}f(\frac{x}{2})$.
$f(\frac{x}{2}) = \frac{x}{2}\mathrm{sh}(\frac{2}{x}) = x\mathrm{ch}(\frac{1}{x})\mathrm{sh}(\frac{1}{x}) = f(x)\mathrm{ch}(\frac{1}{x})$.
On a donc, $\boxed{\text{pour tout } x > 0,\ \psi'(x) = f(x)\left[1 - \tfrac{1}{2}\mathrm{ch}(\tfrac{1}{x})\right]}$.

Exercice 4
Pour $f \in C^0(\mathbb{R})$, on considère l'application g définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad g(x) = \frac{1}{2x}\int_{-x}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad g(0) = f(0).$$

1. Rappeler les propriétés de la fonction $F : x \mapsto \int_0^x f(t)\,dt$.
2. Justifier que g est bien définie sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer que g est continue sur $\mathbb{R}$. *Il faut travailler soigneusement en* 0...
4. Montrer que g est paire.

1. Soit $x \in \mathbb{R}^*$. f est continue sur l'intervalle $[-x, x]$, donc son intégrale sur le segment $[-x, x]$ ou $[x, -x]$ (suivant le signe de x) est bien définie. Donc $\frac{1}{2x}\int_{-x}^{x} f(t)\,dt$ aussi pour $x \neq 0$.

   $\boxed{\text{Donc } g \text{ est bien définie sur } \mathbb{R}.}$

2. <u>Continuité sur $\mathbb{R}^*$</u>.
   f est conitnue sur $\mathbb{R}$ donc, d'après le théorème fondamental de l'analyse, la fonction $F : x \mapsto \int_0^x f(t)\,dt$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $g(x) = \frac{1}{2x}(F(x) - F(-x))$.
   La fonction F est continue sur $\mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto F(-x)$ est continue sur $\mathbb{R}$ puisque c'est la composée de $x \mapsto -x$ continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et F continue sur $\mathbb{R}$. Donc $x \mapsto F(x) - F(-x)$ est continue sur $\mathbb{R}$. La fonction $x \mapsto 2x$ est continue sur $\mathbb{R}$ et ne s'annule que pour $x = 0$.
   On en conclut que, définie comme un quotient, g est continue sur $\mathbb{R}^*$.
   <u>Étude en 0</u>.
   Soit $x \in \mathbb{R}^*$, $g(x) = \frac{1}{2x}(F(x) - F(-x)) = \frac{1}{2}\left(\frac{F(x)}{x} + \frac{F(-x)}{-x}\right)$.
   Or F est dérivable en 0 avec $F(0) = 0$, donc $\lim_{x\to 0}\frac{F(x)}{x}$ existe et vaut $F'(0) = f(0)$.
   De plus, $\lim_{x\to 0} -x = 0$ donc en composant avec $\lim_{x\to 0}\frac{F(x)}{x} = f(0)$, on conclut que $\lim_{x\to 0}\frac{F(-x)}{-x}$ existe et vaut également $f(0)$.

On en déduit que $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$ existe et vaut $f(0) = g(0)$. En conclusion g est continue en 0.

$\boxed{\text{En conclusion, } g \text{ est continue sur } \mathbb{R}.}$

3. Soit $x \in \mathbb{R}^*$, $g(-x) = \dfrac{1}{-2x}\displaystyle\int_x^{-x} f(t)\,dt$.
On utilise le fait que $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt = -\int_b^a f(t)\,dt$. Donc $g(-x) = \dfrac{1}{2x}\displaystyle\int_{-x}^{x} f(t)\,dt = g(x)$.

$\boxed{\text{On en conclut que } \forall x \in \mathbb{R},\ g(-x) = g(x).\ g \text{ est paire.}}$

Fiche 3	*Travail sur les inégalités et propriétés de l'intégrale*

Exercice 5

Montrer que $\dfrac{\displaystyle\int_1^x e^t \ln t\,dt}{e^x \ln x}$ tend vers 1 quand x tend vers $+\infty$.
Indications : On pourra commencer par une intégration par parties pour transformer $\displaystyle\int_1^x e^t \ln t\,dt$. *Puis déterminer un encadrement de* $\displaystyle\int_1^x \frac{e^t}{t}\,dt$*, en utilisant* $\forall t \in [1,x],\ \frac{1}{x} \leqslant \frac{1}{t} \leqslant 1$.

Exercice 6

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue telle que $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{1}{2}$. Montrer qu'il existe $x_0 \in]0,1[$ tel que $f(x_0) = x_0$.

Indication : montrer que la fonction $x \mapsto f(x) - x$ *prend des valeurs positives et négatives, en raisonnant par l'absurde. On utilisera aussi* $\displaystyle\int_0^1 f(x) - x\,dx$.

Exercice 7 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $K_n = \displaystyle\int_0^{\pi/4} \tan^n x\,dx$.

1. Justifier l'existence de K_n. Calculer K_0 et K_1.
Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction $x \mapsto \tan^n x$ est continue sur $[0, \frac{\pi}{4}]$ donc son intégrale sur ce segment existe.
$K_0 = \displaystyle\int_0^{\pi/4} 1\,dx = \frac{\pi}{4}$.
$K_1 = \displaystyle\int_0^{\pi/4} \tan x\,dx = \int_0^{\pi/4} \frac{\sin x}{\cos x}\,dx$. On reconnaît une forme $\dfrac{u'}{u}$, et on obtient
$K_1 = [-\ln(|\cos x|)]_0^{\pi/4} = \ln\sqrt{2}$.

2. Déterminer le réel $K_n + K_{n+2}$ en fonction de n.
Soit $n \in \mathbb{N}$, $K_n + K_{n+2} = \displaystyle\int_0^{\pi/4} \tan^n x(1+\tan^2 x)\,dx$ (par linéarité de l'intégrale).
On reconnaît une forme $u'u^n$ et on obtient $K_n + K_{n+2} = \left[\dfrac{\tan^{n+1}(x)}{n+1}\right]_0^{\pi/4} = \dfrac{1}{n+1}$.

3. Démontrer que la suite (K_n) est monotone et étudier sa limite.
➢ Fixons $n \in \mathbb{N}$ et considérons $K_{n+1} - K_n$.
On remarque que $\forall x \in [0, \frac{\pi}{4}],\ 0 \leqslant \tan x \leqslant 1$, donc $\forall x \in [0, \pi/4],\ \tan^{n+1}(x) \leqslant \tan^n x$.
Donc, par croissance de l'intégrale sur un segment, on a $K_{n+1} \leqslant K_n$.
$\boxed{\text{La suite } (K_n) \text{ est décroissante.}}$
➢ De plus, la suite (K_n) est minorée par 0 car $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in [0, \frac{\pi}{4}],\ 0 \leqslant \tan^n x$, donc $0 \leqslant K_n,\ \forall n \in \mathbb{N}$.
D'après le théorème de la limite monotone, (K_n) est convergente.
➢ On note L sa limite. On a $\forall n \in \mathbb{N},\ K_n + K_{n+2} = \dfrac{1}{n+1}$, donc en passant à la limite dans cette égalité (c'est possible car nous savons que toutes les suites ici ont bien une limite) : $2L = 0$, donc $L = 0$.

4. Déterminer, en fonction de $p \in \mathbb{N}$, le réel K_{2p+3}.

On a $K_3 = \dfrac{1}{2} - K_1$, et $K_5 = \dfrac{1}{4} - K_3 = \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{2} + K_1$.

Par récurrence, on prouve que, pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$K_{2p+3} = \dfrac{1}{2p+2} - \dfrac{1}{2p} + \cdots + \dfrac{(-1)^{p+k-1}}{2k} + \cdots + \dfrac{(-1)^p}{2} + (-1)^{p-1}K_1$,

ou encore $K_{2p+3} = (-1)^{p-1}(\displaystyle\sum_{k=1}^{p+1} \frac{(-1)^k}{2k} + K_1)$.

En déduire l'étude de la limite de la série harmonique alternée (S_n), avec

$$S_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots + (-1)^{k-1}\frac{1}{k} + \cdots + (-1)^p \frac{1}{p+1}$$

On cherche le lien entre K_{2p+3} et S_p, pour $p \in \mathbb{N}$:

$K_{2p+3} = (-1)^p \displaystyle\sum_{k=1}^{p+1} \frac{(-1)^{k-1}}{2k} - (-1)^p \ln\sqrt{2} = \frac{(-1)^p}{2} S_p - (-1)^p \ln\sqrt{2}$.

Donc $S_p = (-1)^p K_{2p+3} + \ln\sqrt{2}$, et en utilisant le fait que (K_{2p+3}) tend vers 0 (comme suite extraite de (K_n)), on conclut que (S_p) converge et $\displaystyle\lim_{p\to+\infty} S_p = \ln\sqrt{2} = \frac{\ln 2}{2}$.

Exercice 8 *Banque PT 2018 - C- Préambule*

On considère deux réels a et b tels que $a < b$, et une fonction f, de classe C^1 sur $[a, b]$.

1. Montrer qu'il existe une constante positive M telle que, pour tout réel t de $[a, b]$: $|f'(t)| \leqslant M$.

2. Que vaut : $\displaystyle\lim_{k\to+\infty, k\in\mathbb{N}} \frac{1}{k}\int_a^b f'(t)e^{ikt}\,dt$?

3. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que : $\displaystyle\lim_{k\to+\infty, k\in\mathbb{N}} \int_a^b f(t)e^{ikt}\,dt = 0$.

Fiche 4 *Entrainement au calcul*

Exercice 9

Fonction	Primitive	intervalle
1. $x \mapsto \dfrac{1}{3x+2}$	$x \mapsto \dfrac{1}{3}\ln\lvert 3x+2\rvert$	$]-\infty, -\frac{2}{3}[$ ou $]-\frac{2}{3}, +\infty[$
2. $x \mapsto e^{2x+1}$	$x \mapsto \dfrac{1}{2}e^{2x+1}$	$\mathbb{R}$
3. $x \mapsto e^{(1-i)x}$	$x \mapsto \dfrac{1}{1-i}e^{(1-i)x}$	$\mathbb{R}$
4. $x \mapsto \sin^3 x$	$x \mapsto \dfrac{1}{4}(\dfrac{1}{3}\cos(3x) - 3\cos(x))$	$\mathbb{R}$
5. $x \mapsto \dfrac{x-1}{x}$	$x \mapsto x - \ln\lvert x\rvert$	$]-\infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$
6. $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$x \mapsto \arcsin(x)$	$]-1, 1[$
7. $x \mapsto \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$	$x \mapsto -\sqrt{1-x^2}$	$]-1, 1[$
8. $x \mapsto e^{-x}\sin(3x)$	$x \mapsto \dfrac{-e^{-x}}{10}(3\cos(3x) + \sin(3x))$	$\mathbb{R}$
9. $x \mapsto \dfrac{1}{(2x+3)^2}$	$x \mapsto \dfrac{-1}{2(2x+3)}$	$]-\infty, -\frac{3}{2}[$ ou $]-\frac{3}{2}, +\infty[$
10. $x \mapsto \dfrac{1}{(x+4)(x-1)}$	$x \mapsto \dfrac{1}{5}\ln\left\lvert\dfrac{x-1}{x+4}\right\rvert$	$]-\infty, -4[$, $]-4, 1[$ ou $]1, +\infty[$

Fonction	Primitive	intervalle
11. $x \mapsto \dfrac{1}{(2x+1)^2+2}$	$x \mapsto \dfrac{1}{2\sqrt{2}} \arctan(\dfrac{2x+1}{\sqrt{2}})$	$\mathbb{R}$
12. $x \mapsto \dfrac{1}{3x^2-5x-2}$	$x \mapsto \dfrac{1}{7} \ln\left\|\dfrac{x-2}{3x+1}\right\|$	$]-\infty, -\dfrac{1}{3}[,]-\dfrac{1}{3}, 2[$ ou $]2, +\infty[$
13. $x \mapsto \dfrac{1}{x^2+2x+2}$	$x \mapsto \arctan(x+1)$	$\mathbb{R}$
14. $x \mapsto \ln(2x+1)$	$x \mapsto \dfrac{2x+1}{2}(\ln(2x+1)-1)$	$]-\dfrac{1}{2}, +\infty[$
15. $x \mapsto \dfrac{x}{2x^2+1}$	$x \mapsto \dfrac{1}{4}\ln(2x^2+1)$	$\mathbb{R}$
16. $x \mapsto \dfrac{1}{e^x-1}$	$x \mapsto \ln\|e^x-1\|-x$	$]-\infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$
17. $x \mapsto \dfrac{\sin x}{1+\cos x}$	$x \mapsto -\ln(1+\cos x)$	$]-pi+2k\pi, \pi+2k\pi[$ pour $k \in \mathbb{Z}$
18. $x \mapsto \dfrac{1}{(1-x)\sqrt{x}}$	$\mapsto \ln\left\|\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}\right\|$	$]0, 1[$ ou $]1, +\infty[$
19. $x \mapsto \dfrac{2x^2}{x^2+1}$	$x \mapsto 2(x-\arctan x)$	$\mathbb{R}$
20. $x \mapsto \dfrac{x}{x^2+x+1}$	$x \mapsto \dfrac{1}{2}\ln(x^2+x+1) - \dfrac{1}{\sqrt{3}}\arctan(\dfrac{2x+1}{\sqrt{3}})$	$\mathbb{R}$
21. $x \mapsto \dfrac{2}{\cos^2 x}$	$x \mapsto 2\tan x$	$]-\dfrac{\pi}{2}+2k\pi, \dfrac{\pi}{2}+2k\pi[$, pour $k \in \mathbb{Z}$
22. $x \mapsto e^{2x}\cos(x)$	$x \mapsto (\dfrac{2}{5}\cos x + \dfrac{1}{5}\sin x)e^{2x}$	$\mathbb{R}$
23. $x \mapsto \dfrac{x}{4-x^2}$	$x \mapsto -\dfrac{1}{2}\ln\|x^2-4\|$	$]-\infty, -2[,]-2, 2[$ ou $]2, +\infty[$
24. $x \mapsto \dfrac{3x^2}{1-x}$	$x \mapsto -\dfrac{3}{2}x^2 + 3\ln\|x-1\|$	$]-\infty, 1[$ ou $]1, +\infty[$
25. $x \mapsto \dfrac{\cos x}{1+\sin^2 x}$	$x \mapsto \arctan(\sin x)$	$\mathbb{R}$