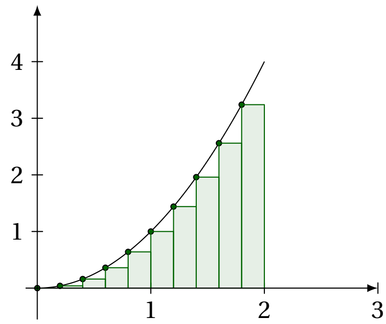
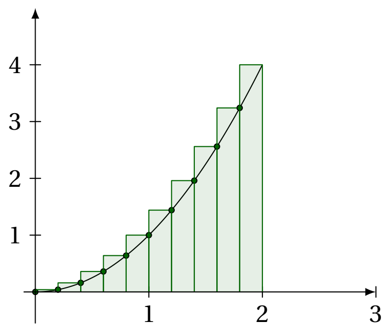
Dans ce chapitre, on considère a et b deux réels tels que $a < b$.
On note $\mathscr{C}([a,b],\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues sur le segment $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

I. Définitions

Soit f dans $\mathscr{C}([a,b],\mathbb{R})$. On construit son intégrale sur le segment $[a,b]$, notée $\int_{[a,b]} f$ ou $\int_a^b f(t)\,dt$.
Pour cela on définit les subdivisions d'un segment, puis les fonctions en escalier sur $[a,b]$ et leur intégrale (comme une somme d'aires algébriques de rectangles). Enfin, on montre que les fonctions continues par morceaux peuvent être approchées (aussi près que l'on veut) par des fonctions en escalier. On peut alors définir l'intégrale sur un segment d'une fonction continue.





Les propriétés fondamentales de l'intégrale ainsi construite sont les suivantes :

1) Linéarité : $\forall \lambda,\ \mu \in \mathbb{R},\ \forall f,\ g \in \mathscr{C}([a,b],\mathbb{R}),\ \int_{[a,b]} \lambda f + \mu g = \lambda \int_{[a,b]} f + \mu \int_{[a,b]} g.$
2) Positivité : $\forall f \in \mathscr{C}([a,b],\mathbb{R})$, si $f \geqslant 0$ sur $[a,b]$ alors $\int_{[a,b]} f \geqslant 0$.
3) Relation de Chasles : $\forall c \in [a,b],\ \forall f \in \mathscr{C}([a,b],\mathbb{R}),\ \int_{[a,b]} f = \int_{[a,c]} f + \int_{[c,b]} f.$

Remarque :

- L'intégrale de f sur $[a,b]$ ne dépend pas des valeurs prises par f en a ou b.
- À partir de la propriété 2., on obtient

  2bis) Croissance : pour $f,\ g \in \mathscr{C}[a,b]$, si $f \leqslant g$ sur $[a,b]$ alors $\int_{[a,b]} f \leqslant \int_{[a,b]} g$.

- Soit f une application continue sur $[a,b]$ et positive. Si il existe $x_0 \in [a,b]$ tel que $f(x_0) > 0$ alors $\int_{[a,b]} f > 0$.
  Par conséquent,

  $$\text{pour } f \text{ continue et positive sur } [a,b],\ \int_{[a,b]} f = 0 \implies f = 0 \text{ sur } [a,b] \tag{1}$$

II. Extensions de la définition

On définit ensuite l'intégrale entre a et b d'une fonction continue par morceaux sur un intervalle I à valeurs dans $\mathbb{R}$, pour $(a,b) \in I$:

- si $a < b$, on prend $\int_a^b f(t)dt = \int_{[a,b]} f$,
- si $a = b$, on prend $\int_a^b f(t)dt = 0$,
- si $a > b$, on prend $\int_a^b f(t)dt = -\int_{[b,a]} f = -\int_b^a f(t)dt$.

Les propriétés de l'intégrale sur un segment sont conservées, mais pour la 2ème, on fera bien attention à l'ordre des bornes.

On définit l'intégrale sur un segment d'une fonction continue sur $[a, b]$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ ou dans $\mathbb{R}^m$ soit en reprenant la construction et en utilisant la norme euclidienne,
soit en utilisant les applications composantes $(f_1, f_2, \dots, f_m)$ de f (qui sont continues de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$), et en posant $\int_a^b f(t)dt = \left(\int_a^b f_1(t)dt, \int_a^b f_2(t)dt, \dots, \int_a^b f_m(t)dt\right)$.
Pour une fonction $f \in \mathscr{M}([a, b], \mathbb{C})$, on a donc $\int_a^b f(t)dt = \int_a^b \mathrm{Re}(f)(t)dt + i\int_a^b \mathrm{Im}(f)(t)dt$.
Les propriétés 1, 3 et 4 sont alors valables en récrivant la 3 :

$$\forall f \in \mathscr{C}([a, b], \mathbb{R}^m),\ \left\|\int_a^b f(t)dt\right\| \leqslant \int_a^b \|f(t)\|dt.$$

III. Valeur absolue et intégrale

Soit f une application continue sur un intervalle I, à valeurs réelles.
On considère $(a, b) \in I^2$ avec $a < b$. On sait alors que $|f|$ est continue et que $-|f| \leqslant f \leqslant |f|$ sur $[a, b]$. On en déduit (grâce à 2) :

$$\boxed{\forall (a, b) \in I^2 \text{ tels que } a < b, \qquad \left|\int_a^b f(t)dt\right| \leqslant \int_a^b |f(t)|dt}$$

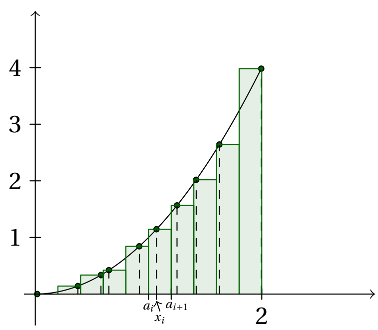
et cette inégalité et encore vraie pour les fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$ avec des modules, ou dans $\mathbb{R}^m$ avec des normes.
On peut en déduire, si $|f| \leqslant M$ sur I : $\forall (a, b) \in I^2$, $\left|\int_a^b f(t)dt\right| \leqslant M|b-a|$.
ou encore, pour $f,\ g \in \mathscr{C}([a, b], \mathbb{K})$, $\left|\int_a^b (fg)(t)dt\right| \leqslant \sup_{t\in[a,b]} |f(t)| \int_a^b |g(t)|dt$

IV. Sommes de Riemann

Soit f une fonction continue de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. **Une subdivision régulière de $n+1$ points** $(a_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$ du segment $[a, b]$ est définie par
$\forall i \in [\![0, n]\!],\ a_i = a + i\dfrac{b-a}{n}$. Le pas de la subdivision est $\delta = \dfrac{b-a}{n}$.
Soit une famille $(x_i)_{0\leqslant i\leqslant n-1}$ de réels tels que pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$, $x_i \in [a_i, a_{i+1}]$.

On appelle **somme de Riemann de** f associée à $(a_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$ et $(x_i)_{0\leqslant i\leqslant n-1}$ le réel $\boxed{S_n = \dfrac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)}$.



Proposition 1

> Soit $f \in \mathscr{C}([a, b], \mathbb{K})$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On considère $(a_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$ la subdivision régulière de $[a, b]$ de $n+1$ points et $(x_i)_{0\leqslant i\leqslant n-1}$ une famille telle que $\forall i \in [\![0, n-1]\!]$, $x_i \in [a_i, a_{i+1}]$.
> On a alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) = \int_a^b f(t)dt$

Remarque : certains choix de la famille (x_i) sont classiques (et doivent donc être connus et reconnus) :

- En prenant $\forall i \in [\![0, n-1]\!],\ x_i = a_i$, on obtient $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(a+i\frac{b-a}{n}) = \int_a^b f(t)dt$.
- En prenant $\forall i \in [\![0, n-1]\!],\ x_i = a_{i+1}$, on obtient $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f(a+i\frac{b-a}{n}) = \int_a^b f(t)dt$.
- En prenant $\forall i \in [\![0, n-1]\!],\ x_i = \dfrac{a_i+a_{i+1}}{2}$, on obtient $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(\frac{a_i+a_{i+1}}{2}) = \int_a^b f(t)dt$.
- Un cas particulier est celui où $[a,b]$ est le segment $[0,1]$, on obtient,
  pour $f \in \mathscr{C}([0,1],\mathbb{K})$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(\frac{i}{n}) = \int_0^1 f(t)dt$

Faire des dessins pour illustrer chaque cas.

V. Théorème fondamental de l'analyse

Soit f une application **continue** sur un **intervalle** I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
On fixe $a \in I$ et on pose $F_a : \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{K} \\ x & \mapsto & \displaystyle\int_a^x f(t)dt \end{array}$.

On remarque d'abord que $\boxed{\forall x, y \in I,\ F_a(y) - F_a(x) = \displaystyle\int_x^y f(t)dt}$, d'après la relation de Chasles.

En supposant que f est bornée sur I, par un réel M, on montre que $\forall x \in I$, $\left|F_a(y) - F_a(x)\right| \leqslant M|y-x|$ à l'aide de l'inégalité de la moyenne. Cela signifie que F_a est, dans ce cas, une fonction lipschitzienne.
Le même raisonnement, en travaillant sur un segment inclus dans I, et contenant un $x_0 \in I$ fixé, permet de prouver que F_a est continue en x_0. Mais nous pouvons faire encore mieux !

Théorème 1 *Théorème fondamental de l'analyse*

> Soit f continue de I dans $\mathbb{K}$, soit $a \in I$.
> L'application $F_a : \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{K} \\ x & \mapsto & \displaystyle\int_a^x f(t)dt \end{array}$ est dérivable sur I et $\forall x \in I,\ F'_a(x) = f(x)$

> **Définition** 1 : Pour une fonction f continue sur I, on appelle **primitive** de f sur I, toute application φ dérivable sur I telle que $\varphi' = f$ sur I.

Le théorème fondamental affirme donc l'existence d'une primitive de f sur I dès que f est continue sur I. Une primitive est naturellement de classe C^1.

De plus, on sait que si une fonction dérivable a sa dérivée nulle sur un intervalle alors elle est constante sur l'intervalle. De ceci, on déduit que deux primitives, sur un intervalle, d'une même fonction continue, diffèrent d'une constante.

Proposition 2

> Soit $f \in C^0(I,\mathbb{K})$. L'ensemble des primitives de f sur I est $\left\{ \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{K} \\ x & \mapsto & F_a(x)+\lambda \end{array},\ \lambda \in \mathbb{K} \right\}$

Proposition 3

> Soit f continue sur un intervalle I.
> Alors f admet des primitives et pour toute primitive Φ de f, on a
> $\forall (a,b) \in I^2,\ \displaystyle\int_a^b f(t)dt = \Phi(b) - \Phi(a)$

$\boxed{\text{À retenir}}$ On note $\Phi(b) - \Phi(a) = [\Phi(t)]_a^b$.

Cas des fonctions de classe C^1 : on déduit de la propriété précédente :

Soit f une fonction de classe C^1 sur I, pour tout $(a,b) \in I^2$, on a

$$\int_a^b f'(t)dt = f(b) - f(a) \tag{2}$$

VI. Calculs

Proposition 4 *Intégration par parties*

Soient u et v deux fonctions de classe C^1 sur $[a,b]$, à valeurs dans $\mathbb{K}$.
On a $\displaystyle\int_a^b u'(t)v(t)\ dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t)\ dt.$

Proposition 5 *Changement de variables*

Soit $f : I \to \mathbb{K}$, continue sur I et φ de classe C^1 sur $[a,b]$. On suppose que $\varphi([a,b]) \subset I$.
$\displaystyle\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\ dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\ dx.$

En pratique

Pour un calcul rapide, on peut écrire : $\begin{array}{ll} x & = \varphi(t) \\ dx & = \varphi'(t)dt \end{array}$
et quand t varie de a à b, x varie de $\varphi(a)$ à $\varphi(b)$ (pour ne pas oublier de changer les bornes).
Pour un calcul de primitives, on peut aussi travailler sans bornes, mais il ne faut pas oublier de revenir en la variable de départ dans la conclusion, et on a alors besoin de la bijectivité de φ.

VII. Formules de Taylor

Grâce à la formule d'intégration par parties, avec un raisonnement par récurrence, on déduit la formule de Taylor (Brook Taylor, 1685-1731, mathématicien anglais) suivante :

Proposition 6 *Formule de Taylor avec reste intégrale*

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit f une fonction de I dans $\mathbb{K}$ de classe C^{n+1} sur I, à valeurs dans $\mathbb{K}$ ou $\mathbb{R}^m$. Soit $(a,x) \in I^2$, on a alors

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\ dt\ .$$

On montre ensuite la formule de Taylor-Lagrange (Joseph Louis Lagrange, 1736-1813, mathématicien italien) :

Proposition 7 *Inégalité de Taylor-Lagrange*
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit f une fonction de I dans $\mathbb{R}$ de classe C^{n+1} sur I Soit $(a,b) \in I^2$. On suppose que M majore $|f^{(n+1)}|$ sur I (ou sur $]a,b[$ou $]b,a[$). On a

$$\left| f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right| \leqslant M \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!}$$

Ces deux formules complètent les formules de Taylor que vous connaissez déjà : la formule de Taylor pour les polynômes, la formule de Taylor-Young (pour les développements limités).