Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $\mathcal{R} = (O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

I. COURBE PARAMÉTRÉE

1. Définitions

Définition 1 : Soit $f\ :\ I \to \mathbb{R}^2$ une fonction de classe C^1 sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.
On appelle arc paramétré le couple (I, f).
L'ensemble Γ des points $M(t)$ de coordonnées $f(t)$ quand t parcourt I est le support de la courbe (ou la trajectoire).
On dit que Γ est paramétrée par f ou que f est une repréntation paramétrique de Γ.

Vocabulaire
On dit que t est le paramètre de la courbe, et $M(t)$ est le point de paramètre t.
Si $f\ :\ \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R}^2 \\ t & \mapsto & (x(t), y(t)) \end{array}$, (on peut noter $f\ :\ t \mapsto \overrightarrow{OM(t)}$),
on identifie $f(t)$ au vecteur $\overrightarrow{OM(t)}$ qui a les mêmes coordonnées dans $(\vec{\imath},\vec{\jmath})$.
On définira souvent la courbe paramétrée en donnant : $\Gamma \left\{ \begin{array}{ll} x & = x(t) \\ y & = y(t) \end{array} \right.$, $t \in I$

Exemple 1

- Soit $f\ :\ \begin{array}{ccc} [0, 2\pi[& \to & \mathbb{R}^2 \\ t & \mapsto & (\cos(t), \sin(t)) \end{array}$, $g\ :\ \begin{array}{ccc} [0, \pi[& \to & \mathbb{R}^2 \\ t & \mapsto & (\cos(2t), \sin(2t)) \end{array}$ et $h\ :\ \begin{array}{ccc} [0, \pi[& \to & \mathbb{R}^2 \\ t & \mapsto & (\cos(t), \sin(t)) \end{array}$.
  f et g sont deux paramétrages du cercle trigonométrique. h est un paramétrage du demi-cercle au-dessus de l'axe des abscisses. Le domaine de définition (l'intervalle I) a son importance dans la définition de l'arc.

- Soit $f\ :\ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^2 \\ t & \mapsto & (\cos(2t), \sin(t)) \end{array}$

- Soit $f\ :\ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^2 \\ t & \mapsto & (t^2 - 2t, 2t^3 - 6t) \end{array}$

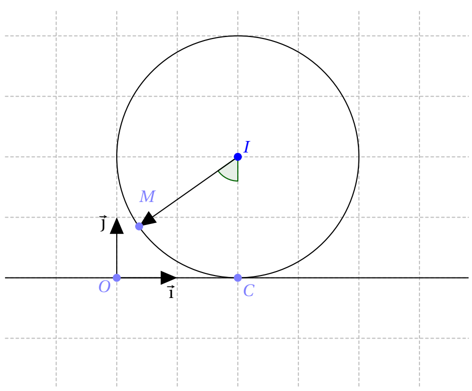
2. Interprétations cinématique et géométrique

On considère un point mobile $M(t)$ dont la position à l'instant t est définie par ses coordonnées $(x(t), y(t))$ dans le repère $\mathcal{R}$ du plan. La courbe paramétrée par $f\ :\ t \mapsto (x(t), y(t))$ est la trajectoire du point mobile, on considère qu'elle est parcourue dans le sens des t croissants.

On s'intéressera à la vitesse du point $\dfrac{d\overrightarrow{OM}(t)}{dt}$, reliée à $f'(t)$ et à son accélération, reliée à $f''(t)$.

Exemple 2

- Une roue circulaire de rayon R tourne sans glisser sur une route plane. Un point M est marqué sur cette roue, quelle est la trajectoire du point M dans un repère lié à la route ?
- On peut imaginer le même problème avec une roue carrée.
- On peut encore reprendre ceci avec une roue circulaire de rayon r qui tourne sans glisser sur une roue circulaire de rayon R.



3. Plan d'étude

- Domaine d'étude
  ➢ domaine de définition de x et y.
  ➢ chercher des symétries pour limiter le domaine d'étude (s'appuyer sur la parité, la périodicité,...faire un dessin et bien préciser les symétries et les réductions du domaine d'étude).
- Variations de x et y
  ➢ calcul de leurs dérivées x' et y',
  ➢ étude des signes de x' et y',
  ➢ recherche des points singuliers (points où x' et y' s'annulent en même temps),
  ➢ tableau de variation conjoint complet (avec les valeurs et les limites).
- Étude des tangentes
  ➢ en un point singulier s'il y en a (tangente, position relative, allure).
  ➢ tangentes verticales ou horizontales,
  ➢ d'autres tangentes demandées ou pour préciser la courbe.
- Étude des branches infinies (asymptotes et positions relatives).
- **Tracé** : reprendre tous les points de l'étude, vérifier la cohérence de l'ensemble.

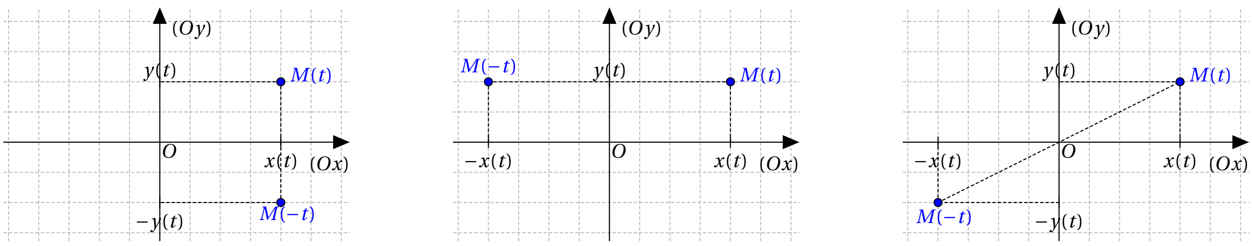
4. Étude des symétries
Le but est d'exploiter les symétries de l'arc pour réduire l'intervalle détude.
Les symétries se détectent grâce aux propriétés de f (et donc des fonctions x et y).

➢ Périodicité
Si f est périodique de période T, les points $M(t+T)$ et $M(t)$ sont confondus pour tout $t \in I$. On étudie donc simplement l'arc sur un intervalle de longueur T, et le tracé fournit tout le support.

➢ Parité/Imparité

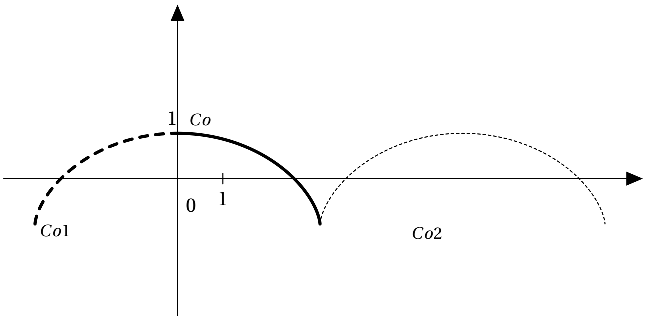
- ➙ si x et y sont paires, alors les points $M(t)$ et $M(-t)$ sont confondus pour tout t.
- ➙ si x est paire et y est impaire, alors, pour tout t, le point $M(-t)$ est le symétrique de $M(t)$ par rapport à l'axe (Ox).
- ➙ si x est impaire et y est paire, alors pour tout t, le point $M(-t)$ est le symétrique de $M(t)$ par rapport à l'axe (Oy).
- ➙ si x et y sont impaires, alors pour tout t, le point $M(-t)$ est le symétrique de $M(t)$ par rapport au point O.

Dans tous ces cas, on peut réduire l'étude à $I \cap [0,+\infty[$ et déduire le tracé complet par la symétrie indiquée.



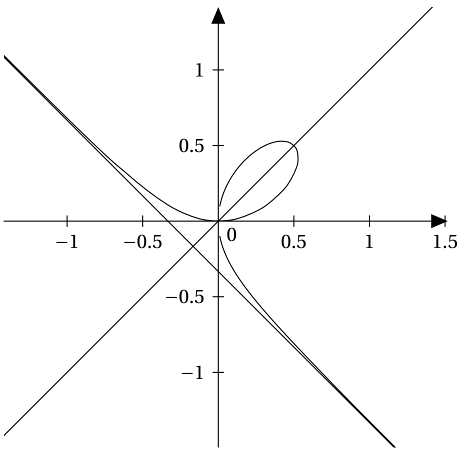
➢ Autres symétries
On cherche une relation entre le point $M(t)$ et un autre point. On en déduit une symétrie et une réduction possible de l'intervalle d'étude : celle-ci s'obtient en exploitant la relation entre les paramètres.

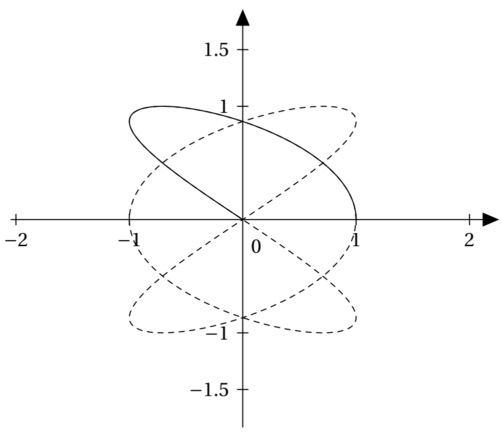
➙ Soit $f : t \mapsto (t+\sin(t), \cos t)$.
On remarque que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $f(t+2\pi) = 2\pi\vec{\imath} + f(t)$. Le point $M(t+2\pi)$ est le translaté de $M(t)$ par la translation de vecteur $2\pi\vec{\imath}$.
On limite l'étude à t variant dans un intervalle de longueur 2π et on complète le tracé par des translations de vecteur $2\pi\vec{\imath}$ du tracé initial.
On a aussi des propriétés de parité/imparité : le point $M(-t)$ est le symétrique par rapport à (Oy) de $M(t)$.
On limite donc l'étude à l'intervalle $[0,\pi]$: après une symétrie d'axe (Oy), on aura le tracé pour t variant dans $[-\pi,\pi]$, intervalle de longueur 2π.



➞ Soit la courbe paramétrée par $\begin{cases} x = \dfrac{t}{1+t^3} \\ y = \dfrac{t^2}{1+t^3} \end{cases}$, $t \in D =]-\infty, -1[\cup]-1, +\infty[$.

On remarque que $\forall t \in D$, $\begin{cases} x(\frac{1}{t}) = y(t) \\ y(\frac{1}{t}) = x(t) \end{cases}$. On en déduit que $M(\frac{1}{t})$ est le symétrique de $M(t)$ par rapport à la droite D d'équation $y = x$.
On peut étudier l'arc sur l'intervalle $]0,1]$ et en déduire le tracé sur $[1,+\infty[$ par symétrie.
De même le tracé sur $]-1,0[$ donne par symétrie l'arc pour $t \in]-\infty,-1[$.





➞ Soit la courbe paramétrée par $\begin{cases} x = \cos(3t) \\ y = \sin(2t) \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$.

x est $\dfrac{2\pi}{3}-$périodique et y est $\pi-$périodique. La fonction f est $2\pi-$périodique : on réduit l'étude à un intervalle de longueur 2π.
x est paire et y impaire : pour tout $t \in \mathbb{R}$, $M(-t)$ est le symétrique de $M(t)$ par rapport à (Ox). On peut donc limiter l'étude à l'intervalle $[0,\pi]$ et effectuer la symétrie indiquée.
On remarque enfin que $\forall t \in \mathbb{R}$, $\begin{cases} x(\pi - t) = \cos(3\pi - 3t) = \cos(\pi - 3t) = -x(t) \\ y(\pi - t) = \sin(2\pi - 2t) = -y(t) \end{cases}$.
On en déduit que $M(\pi - t)$ est le symétrique de $M(t)$ par rapport au point O (le vérifier sur un dessin).
On peut étudier l'arc sur l'intervalle $[0, \frac{\pi}{2}]$, puis tracer le symétrique par rapport à O. Or quand t varie de 0 à $\frac{\pi}{2}$, $\pi - t$ varie de π à $\frac{\pi}{2}$. En traçant le symétrique, on a donc obtenu la partie correspondant à $t \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$.

II. ÉTUDE LOCALE

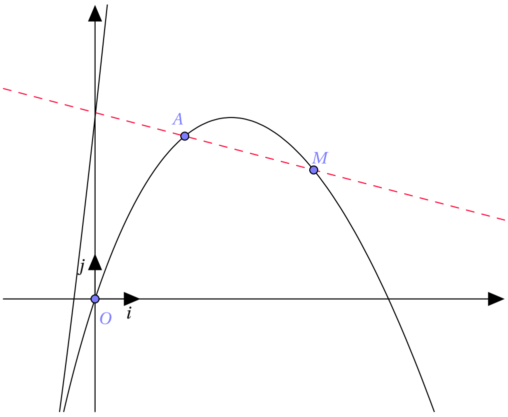
1. Tangente

Définition 2 : Soit Γ une courbe paramétrée par f, où f est de classe C^1 sur I, intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $a \in I$.
On dit que Γ admet une **demi-tangente à gauche en** $M(a)$ (ou en a) si

$$\lim_{\substack{t \to a \\ t<a}} \frac{f(t)-f(a)}{\|f(t)-f(a)\|} = \vec{u}_g \text{ existe (dans } \mathbb{R}^2).$$

La demi-tangente à gauche en $M(a)$ est alors la demi-droite passant par $M(a)$ et dirigée par cette limite.

Soit $t \in I$, le vecteur $\vec{u}(t) = \dfrac{f(t)-f(a)}{\|f(t)-f(a)\|}$ est un vecteur unitaire dirigeant la droite $(M(a)M(t))$, appelée sécante.
La demi-tangente à gauche est donc la position limite des sécantes $(M(a)M(t))$ à la courbe quand t se rapproche de a par valeurs inférieures.
On définit de même la demi-tangente à droite en $M(a)$:
C'est la demi-droite passant par $M(a)$ et dirigée par $\displaystyle\lim_{\substack{t \to a \\ t>a}} \frac{f(t)-f(a)}{\|f(t)-f(a)\|} = \vec{u}_d$ **si** cette limite existe.



Définition 3 : ✰ On dit que la courbe admet une **tangente en** $M(a)$ si elle admet des demi-tangentes en $M(a)$ à gauche et à droite dirigées respectivement par $\vec{u}_g$ et $\vec{u}_d$ telles que $\vec{u}_g = \pm\vec{u}_d$.
➢ La **tangente** à la courbe en $M(a)$ est la droite passant par $M(a)$ et dirigée par $\vec{u} = \vec{u}_g = \pm\vec{u}_d$.
➢ La **normale** à la courbe en $M(a)$ est la droite perpendiculaire à la tangente passant par $M(a)$.

2. Arc régulière

Définition 4 : ✰ Soit Γ une courbe paramétrée par f, de classe C^1 sur un intervalle I. Soit $a \in I$.
On dit que $M(a)$ est un **point régulier** si $f'(a) \neq \overrightarrow{0}$
et que $M(a)$ est un **point singulier** (ou stationnaire) si $f'(a) = \overrightarrow{0}$.
On dit que la courbe est **régulière** si tous ses points sont réguliers, i.e. si $\forall t \in I,\ f'(t) \neq \overrightarrow{0}$.

Proposition 1 ✰

Soit une courbe paramétrée de classe C^1 par $f : I \to \mathbb{R}^2$. Soit $a \in I$.
Si $M(a)$ est un point régulier de la courbe, alors celle-ci admet une tangente en $M(a)$, dirigée par le vecteur $f'(a)$.

démo

Exemple 3

Soit Γ la courbe paramétrée par $\begin{cases} x &= t^2-2t \\ y &= 2t^3-6t \end{cases}$. La fonction $f : t \mapsto (t^2-2t, 2t^3-6t)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.
Pour étudier l'arc, on commence par dériver les fonctions coordonnées de f.
$\begin{cases} x'(t) &= 2(t-1) \\ y'(t) &= 6(t-1)(t+1) \end{cases}$, donc pour tout $t \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ le point $M(t)$ est régulier.
En un tel point, la courbe admet une tangente, dirigée par $f'(t)$, ou encore $\vec{u}_t(1, 3(t+1))$ (vecteur non nul, colinéaire à $f'(t)$).
On peut en déduire l'équation de la tangente en $M(0)$ par exemple : $y = 3x$. Ou bien celle en $M(2)$: $y - 4 = 9x$.

Remarque 1 :

- Rappel : connaissant un point $A(x_A, y_A)$ et un vecteur $\vec{u}(\alpha, \beta)$, quelle est l'équation de la droite T passant par A, dirigée par $\vec{u}$?
  Soit $M(x, y)$ un point du plan, $M \in T \iff \left[\overrightarrow{AM}, \vec{u}\right] = \overrightarrow{0}$. Ceci conduit à
  $$M(x, y) \in T \iff \beta(x - x_A) - \alpha(y - y_A) = 0 .$$
  T admet donc pour équation cartésienne $\beta(x - x_A) - \alpha(y - y_A) = 0$.
- Il est possible de faire le lien avec les graphes de fonctions : considérons la courbe G d'équation cartésienne $y = \varphi(x)$, où φ est une application de I dans $\mathbb{R}$, de classe C^1.
  Vous savez alors que, en tout point d'abscisse $a \in I$, la courbe admet une tangente d'équation
  $$y = \varphi'(a)(x - a) + \varphi(a) .$$
  Posons $f\ :\ t \mapsto (t, \varphi(t))$. La courbe G est paramétrée par f sur I.
  f est de classe C^1 sur I et $\forall t \in I,\ f'(t) = (1, \varphi'(t))$.
  Ce dernier vecteur n'est jamais nul donc tous les points de G sont réguliers. Donc, pour tout $a \in I$, la courbe admet une tangente au point $M(a)(a, \varphi(a))$, dirigée par le vecteur de coordonnées $(1, \varphi'(a))$.
  On peut ainsi retrouver l'équation cartésienne annoncée plus haut.

3. Étude des points singuliers

Soit Γ une courbe paramétrée par f, de classe C^n sur I, avec $n \geqslant 2$.
On suppose que le point $M(a)$ de paramètre $a \in I$ est un point singulier. On écrit la formule de Taylor-Young pour f en a :

$$\forall t \in I,\ f(t) = f(a) + \frac{f''(a)}{2}(t-a)^2 + \frac{f^{(3)}(a)}{6}(t-a)^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(t-a)^n + o\big((t-a)^n\big)\ (1).$$

➢ On suppose qu'il existe $\boxed{p = \min\left\{k \in [\![1, n]\!]\ /\ f^{(k)}(a) \neq \overrightarrow{0}\right\}}$

On peut alors écrire, pour $t \neq a$, $f(t) - f(a) \underset{a}{\sim} (t-a)^p \dfrac{f^{(p)}(a)}{p!}$ et donc

$\dfrac{f(t) - f(a)}{\|f(t) - f(a)\|} \underset{a}{\sim} \delta \dfrac{f^{(p)}(a)}{\|f^{(p)}(a)\|}$ où $\delta = \begin{cases} 1 & \text{si } t > a \text{ ou } (t < a \text{ et } p \text{ pair}) \\ -1 & \text{si } t < a \text{ et } p \text{ impair} \end{cases}$

On en déduit que la courbe admet une tangente dirigée par $f^{(p)}(a)$ au point $M(a)$.

➢ On suppose maintenant qu'il existe p défini comme au-dessus et
$\boxed{q = \min\left\{k \in [\![p+1, n]\!]\ /\ (f^{(p)}(a), f^{(k)}(a)) \text{ est libre}\right\}}$
Nous écrivons la relation (1) avec des vecteurs :
$$\overrightarrow{M(a)M(t)} = (t-a)^p \overrightarrow{V_p} + (t-a)^{p+1}\overrightarrow{V_{p+1}} + \cdots + (t-a)^q \overrightarrow{V_q} + (t-a)^q \overrightarrow{\varepsilon(t)}\ (2)$$

On se place ensuite dans le repère $(M(a); \overrightarrow{V_p}, \overrightarrow{V_q})$ et on note $(X(t), Y(t))$ les coordonnées de $M(t)$ dans ce nouveau repère.
La relation (2) permet, en utilisant le fait que les vecteurs $\overrightarrow{V_{p+1}}$, ..., $\overrightarrow{V_{q-1}}$ sont tous colinéaires à $\overrightarrow{V_p}$, de montrer que $\begin{cases} X(t) \sim (t-a)^p \\ Y(t) \sim (t-a)^q \end{cases}$.

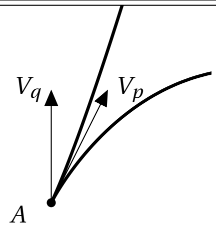
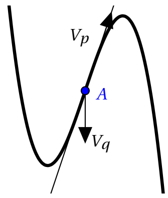
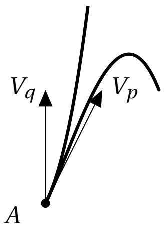
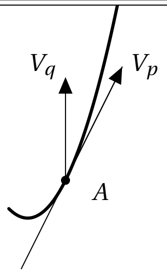
Résumé

En pratique, on partira des développements limités des fonctions x et y définissant le paramétrage :
$$\begin{cases} x(t) &= x(a) + a_1(t-a) + a_2(t-a)^2 + a_3(t-a)^3 + \cdots + a_n(t-a)^n + (t-a)^n\varepsilon_1(t) \\ y(t) &= y(a) + b_1(t-a) + b_2(t-a)^2 + b_3(t-a)^3 + \cdots + b_n(t-a)^n + (t-a)^n\varepsilon_2(t) \end{cases}$$
Cela s'écrit vectoriellement $\overrightarrow{M(a)M(t)} = (t-a)^2\overrightarrow{V_2} + (t-a)^3\overrightarrow{V_3} + \cdots + (t-a)^n\overrightarrow{V_n} + (t-a)^n\overrightarrow{\varepsilon(t)}$.
On définit, sous réserve d'existence,

- p le plus petit indice tel que $\overrightarrow{V_p} \neq \overrightarrow{0}$, **la tangente en M(a) est dirigée par le vecteur** $\overrightarrow{V_p}$
- q le plus petit indice tel que la famille $(\overrightarrow{V_p}, \overrightarrow{V_q})$ est libre.

Dans $(M(a); \overrightarrow{V_p}, \overrightarrow{V_q})$, les coordonnées $(X(t), Y(t))$ du point $M(t)$ vérifient,
pour t au voisinage de a : $\begin{cases} X(t) \sim (t-a)^p \\ Y(t) \sim (t-a)^q \end{cases}$.
On en déduit l'allure de la courbe au voisinage du point $M(a)$, en découpant le plan en quatre régions.

On en déduit les quatre cas possibles pour l'allure d'un point singulier :

	p pair	p impair
q impair	 point de rebroussement de première espèce	 point d'inflexion
q pair	 point de rebroussement de seconde espèce	 point normal

Remarque 2 :

- En un point de rebroussement, la courbe reste dans le même demi-plan délimité par la droite dirigée par $\vec{V}_q$ et passant par $M(t_0)$. En un point d'inflexion, la courbe traverse la tangente.
- pour trouver le dévelopement limité des fonctions, on peut utiliser la formule de Taylor-Young ou les DLs usuels en 0.
- le même raisonnement s'applique en un point régulier et permet de trouver l'allure au voisinage du point. La situation la plus courante sera $p = 1$ et $q = 2$, ce qui donne un point normal. On parle aussi de point d'inflexion si $p = 1$ et q est impair (la courbe traverse la tangente).

4. Branches infinies

Soit une courbe Γ paramétrée par f de classe C^1 sur I, intervalle de la forme $[a, b[$ ou $]a, b]$ (ici a et b peuvent être réels ou égaux à $\pm\infty$).

Définition 5 : On dit que la courbe admet une branche infinie en a si $\lim\limits_{t\to a} \|f(t)\| = +\infty$.

Parmi les branches infinies, on distingue deux types :

- ✰les asymptotes : la courbe se rapproche d'une droite $\mathcal{D}$. La droite $\mathcal{D}$ déquation $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$ est **asymptote** à Γ si $\lim\limits_{t\to a} d(M(t), \mathcal{D}) = 0$, c'est-à-dire si $\lim\limits_{t\to a}(\alpha x(t) + \beta y(t) + \gamma) = 0$.
  On distingue alors les asymptotes verticales, horizontales et obliques.
- les branches paraboliques : les coordonnées x et y du point $M(t)$ tendent toutes les deux vers l'infini et la courbe présente l'allure d'une branche de parabole d'axe $\mathcal{D}$: $y = \alpha x$. L'axe est la **direction asymptotique**.

Voici comment mener l'étude des branches infinies :

➢ Si $\boxed{\lim\limits_{t\to t_0} x(t) = \pm\infty \text{ et } \lim\limits_{t\to t_0} y(t) = l \in \mathbb{R}}$, la droite d'équation $y = l$ est **asymptote horizontale** à la courbe en t_0.

➢ Si $\boxed{\lim\limits_{t\to t_0} x(t) = l \in \mathbb{R} \text{ et } \lim\limits_{t\to t_0} y(t) = \pm\infty}$, la droite d'équation $x = l$ est **asymptote verticale** à la courbe en t_0.

➢ Si $\boxed{\lim\limits_{t\to t_0} x(t) = \pm\infty \text{ et } \lim\limits_{t\to t_0} y(t) = \pm\infty}$, on étudie $\dfrac{y(t)}{x(t)}$:

➙ si $\lim\limits_{t\to t_0} \dfrac{y(t)}{x(t)} = \pm\infty$, on dit que la courbe admet une **branche parabolique** de direction asymptotique $x = 0$.

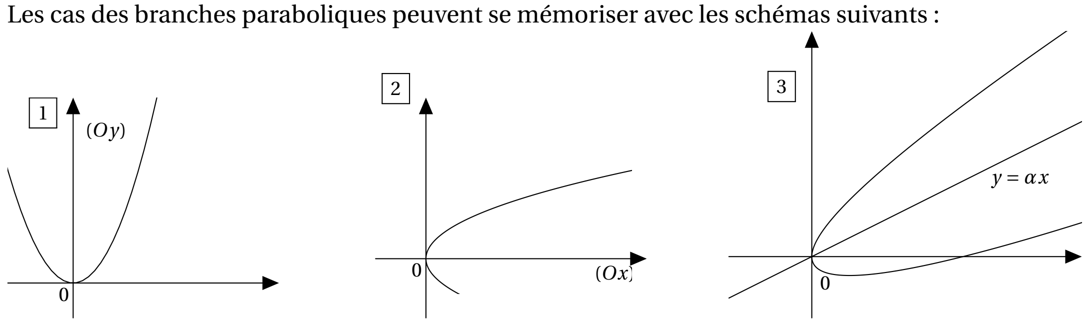
➙ si $\lim\limits_{t\to t_0} \dfrac{y(t)}{x(t)} = 0$, on dit que la courbe admet une **branche parabolique** de direction asymptotique $y = 0$.

➙ si $\lim\limits_{t\to t_0} \dfrac{y(t)}{x(t)} = \alpha \in \mathbb{R}^*$, on étudie $y(t) - \alpha x(t)$:

➘ si $\lim\limits_{t\to t_0} y(t) - \alpha x(t) = \pm\infty$, on dit que la courbe admet une **branche parabolique** de direction asymptotique $y = \alpha x$.

➘ si $\lim\limits_{t\to t_0} y(t) - \alpha x(t) = \beta \in \mathbb{R}$, la courbe admet une **asymptote oblique** d'équation $y = \alpha x + \beta$.

Les cas des branches paraboliques peuvent se mémoriser avec les schémas suivants :



$\boxed{1}$ $\begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = t^2 \end{cases}$ $\lim\limits_{t\to a} \dfrac{y(t)}{x(t)} = \pm\infty$ BP de DA l'axe (Oy).

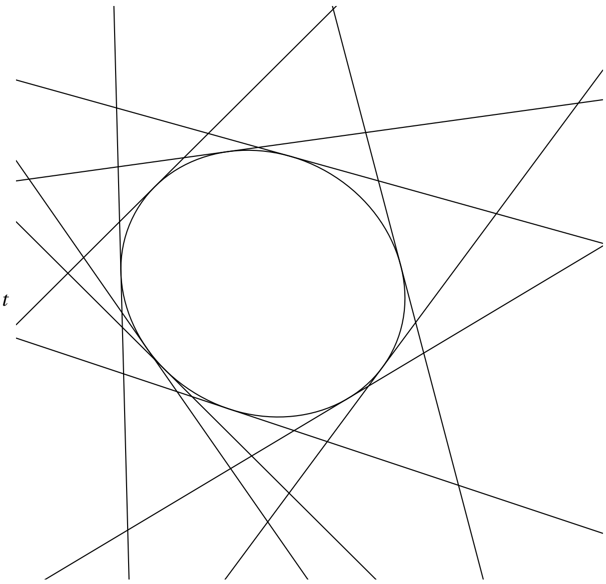
$\boxed{2}$ $\begin{cases} x(t) = t^2 \\ y(t) = t \end{cases}$ $\lim\limits_{t\to a} \dfrac{y(t)}{x(t)} = 0$ BP de DA l'axe (Ox).

$\boxed{3}$ $\begin{cases} x(t) = t^2 \\ y(t) = \alpha t^2 + t \end{cases}$ $\lim\limits_{t\to a} \dfrac{y(t)}{x(t)} = \alpha$ et $\lim\limits_{t\to a} y(t) - \alpha x(t) = \pm\infty$ BP de DA $D\ :\ y = \alpha x$.

III. ENVELOPPES

On considère une famille de droites du plan $(D_t)_{t\in I}$.

On cherche une courbe Γ telle que chaque droite D_t est tangente à Γ.



Définition 6 : ✰ On appelle enveloppe de la famille $(D_t)_{t\in I}$ toute **courbe** Γ telle que, pour tout $t \in I$, la droite D_t est tangente à Γ en $M(t)$.

Remarque : cela signifie que toute droite D_t de la famille est tangente à Γ et qu'en tout point de Γ, Γ admet une tangente qui est une droite de la famille $(D_t)_{t\in I}$.

Recherche à partir d'un paramétrage des droites

On connaît pour tout $t \in I$, un point $A(t)$ et un vecteur directeur $\vec{u}(t)$ de la droite D_t. On suppose que les fonction $t \mapsto A(t)$ et $t \mapsto \vec{u}(t)$ sont de classe C^1 sur I.
On suppose que $\forall t \in I$, $\left[\vec{u}\,'(t), \vec{u}(t)\right] \neq 0$.

On cherche alors une courbe $\Gamma : t \mapsto M(t)$ telle que D_t soit tangente à Γ en $M(t)$ pour tout $t \in I$.

Analyse : On suppose donc que on sait définir $\Gamma : t \mapsto M(t)$. On traduit que $M(t)$ est sur D_t :
$\forall t \in I$, il existe un $\lambda(t)$ tel que $M(t) = A(t) + \lambda(t)\vec{u}(t)$ (i.e. $\overrightarrow{A(t)M(t)} = \lambda(t)\vec{u}(t)$).
On note $f : t \mapsto \overrightarrow{OM(t)}$, donc $\forall t \in I,\ f(t) = \overrightarrow{OA(t)} + \overrightarrow{A(t)M(t)} = \overrightarrow{OA(t)} + \lambda(t)\vec{u}(t)$.
On cherche à définir $M(t)$, et donc à définir $\lambda(t)$.
On traduit que D_t est tangente à Γ en $M(t)$: pour tout $t \in I$, $f'(t)$ est colinéaire à $\vec{u}(t)$.
On a donc $\left[f'(t), \vec{u}(t)\right] = 0$. Or

$$\begin{aligned}\left[f'(t), \vec{u}(t)\right] &= \left[\overrightarrow{OA'(t)} + \lambda'(t)\vec{u}(t) + \lambda(t)\vec{u}\,'(t)\ ,\ \vec{u}(t)\right],\\ &= \left[\overrightarrow{OA'(t)}\,, \vec{u}(t)\right] + \lambda(t)\left[\vec{u}\,'(t), \vec{u}(t)\right].\end{aligned}$$

On suppose que $\forall t \in I$, $\left[\vec{u}\,'(t), \vec{u}(t)\right] \neq 0$, et on déduit ainsi de nos conditions : $\lambda(t) = -\dfrac{\left[\overrightarrow{OA'(t)}\,, \vec{u}(t)\right]}{\left[\vec{u}\,'(t), \vec{u}(t)\right]}$.

Synthèse : On pose $f : t \mapsto \overrightarrow{OA(t)} + \lambda(t)\vec{u}(t)$ avec $\lambda(t) = -\dfrac{\left[\overrightarrow{OA'(t)}\,, \vec{u}(t)\right]}{\left[\vec{u}\,'(t), \vec{u}(t)\right]}$.
Cela signifie que $M(t) = A(t) + \lambda(t)\vec{u}(t)$, pour tout $t \in I$, donc $\forall t \in I,\ M(t) \in D_t$.
Si f est dérivable sur I (il faudrait supposer que A et $\vec{u}$ sont des fonctions de classe C^2 pour l'affirmer,
alors $f'(t) = \overrightarrow{OA'(t)} + \lambda'(t)\vec{u}(t) + \lambda(t)\vec{u}\,'(t)$.
Cela permet de montrer que, pour tout $t \in I$, $\left[f'(t), \vec{u}(t)\right] = 0$, donc si ce vecteur $f'(t)$ est non nul, il dirige la tangente à Γ en $M(t)$ et est colinéaire à $\vec{u}(t)$.
La courbe ainsi définie est donc l'enveloppe des droites D_t.

Conclusion ✰

Pour trouver une enveloppe de la famille $(D_t)_{t\in\mathbb{R}}$, donnée par un point $A(t)$ et un vecteur directeur $\vec{u}(t)$, où $t \mapsto A(t)$ et $t \mapsto \vec{u}(t)$ sont de classe C^1 sur I,

- On vérifie que $\left[\vec{u}\,'(t), \vec{u}(t)\right] \neq 0$, et on pose $\lambda(t) = -\dfrac{\left[\overrightarrow{OA'(t)}\,, \vec{u}(t)\right]}{\left[\vec{u}\,'(t), \vec{u}(t)\right]}$.
- On pose $\Gamma : t \mapsto M(t) = A(t) + \lambda(t)\vec{u}(t)$, et on vérifie que cette courbe est régulière et est bien l'enveloppe de la famille (D_t).

Exemple 4 :

1. Trouver l'enveloppe de la famille de droites $(D_t)_{t\in\mathbb{R}}$ où D_t est la droite passant par $A(t)(t, t^2)$ et dirigée par le vecteur $\vec{u}(t)\ (-t, t^2+1)$.
2. Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$ un réel fixé. On considère deux points P sur (Oy), Q sur (Ox) tels que la distance $PQ = a$.
On décrit les coordonnées de P et Q au moyen d'un paramètre t dans $[0, \frac{\pi}{2}]$: $P(0, a\cos t)$ et $Q(a\sin t, 0)$. Déterminer l'enveloppe des droites (PQ) quand t variant entre 0 et $\frac{\pi}{2}$.

Un site très complet à consulter pour en apprendre plus sur les courbes classiques : https://www.mathcurve.com
Le site exo 7 pour trouver un cours complet et d'autres exercices : http://exo7.emath.fr/cours/ch_courbes.pdf