I. NORME EUCLIDIENNE DANS $\mathbb{R}^m$

Dans ce qui suit, m désigne un entier égal à 2 ou 3. On peut très bien généraliser tout ces résultats à d'autres valeurs de $m \in \mathbb{N}^*$, et même à d'autres espaces que $\mathbb{R}^m$.

1. Définitions

Définition 1 : Soient $u = (u_1, \ldots, u_m)$ et $y = (y_1, \ldots, y_m)$ dans $\mathbb{R}^m$.
Le produit scalaire de u et y est défini par $(u|y) = \sum_{k=1}^{m} u_k y_k$.

Remarque 1 :
L'application $(u, y) \mapsto (u|y)$ est une forme bilinéaire symétrique car
$\forall u,\ y \in \mathbb{R}^m,\ (u|y) = (y|u)$ et $\forall u,\ u',\ y \in \mathbb{R}^m,\ \forall \lambda,\ \mu \in \mathbb{R},\ (\lambda u + \mu u', y) = \lambda(u, y) + \mu(u', y)$.
On a, pour tout $u \in \mathbb{R}^m$, $(u|u) \geqslant 0$ et $(u|u) = 0 \iff u = 0$.

Définition 2 : On appelle **norme euclidienne de** $\mathbb{R}^m$, l'application $\|\cdot\| : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^m & \to & \mathbb{R} \\ (u_1, \ldots, u_m) & \mapsto & \sqrt{\sum_{k=1}^{m} u_k^2} \end{array}$.

Proposition 1 *Inégalité de Cauchy-Schwarz*

Soient $u,\ y$ dans $\mathbb{R}^m$, on a
$$\left|(u|y)\right| \leqslant \|u\|\ \|y\| .$$
Il y a égalité si et seulement si u et y sont colinéaires.

démo : on pose $\forall \lambda \in \mathbb{R},\ P(\lambda) = (u + \lambda y | u + \lambda y)$.
➢ On vérifie que P est une application polynomiale en λ : $P(\lambda) = \lambda^2 (y|y) + 2\lambda(u|y) + (u|x)$.
On utilise là le fait que $(\cdot|\cdot)$ est bilinéaire et symétrique.
Elle est de degré 2 si $\|y\| \neq 0$, de degré inférieur à 1 sinon.
➢ Premier cas : $y = 0$. Dans ce cas, on a aussi $(u|y) = 0$ donc l'inégalité cherchée est vraie ! Il y a même égalité et on peut dire que u et y sont colinéaires.
➢ Deuxième cas : on suppose que $y \neq 0$, alors $\|y\| \neq 0$ et P est une fonction polynomiale de degré 2.
On remarque alors que $\forall \lambda \in \mathbb{R},\ P(\lambda) \geqslant 0$. Cela n'est possible que si le discriminant $\Delta = 4(u|y) - 4(y|y)(u|u)$ est négatif ou nul (en effet, sinon, le polynôme a deux racines distinctes et notre fonction change de signe). On a prouvé l'inégalité !
Intéressons-nous au cas d'égalité : il équivaut à dire que le discriminant est nul, donc qu'il existe $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ tel que $P(\lambda_0) = 0$.
Et cela équivaut à $(u + \lambda_0 y | u + \lambda_0 y) = 0$, donc à $u + \lambda_0 y = 0$, ou encore à $u = -\lambda_0 y$.
Donc il y égalité $\left|(u|y)\right| = \|u\|\ \|y\|$ si et seulement si $y = 0$ (premier cas) ou $\exists \lambda_0,\ u = (-\lambda_0) y$.

Proposition 2

L'application $\|\cdot\|$ vérifie les trois propriétés suivantes :
- $\forall u \in \mathbb{R}^m,\ \|u\| = 0 \implies u = 0_{\mathbb{R}^m}$ *Séparation*
- $\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall u \in \mathbb{R}^m,\ \|\lambda u\| = |\lambda|\ \|u\|$ *Homogénéité*
- $\forall u, y \in \mathbb{R}^m,\ \|u + y\| \leqslant \|u\| + \|y\|$ *Inégalité triangulaire*

démo : montrons le troisième point.Soient u et y dans $\mathbb{R}^m$, on a $\|u + y\|^2 = (u + y | u + y) = \|u\|^2 + 2(u|y) + \|y\|^2$.
Or $(u|y) \leqslant |(u|y)| \leqslant \|u\|\ \|y\|$, donc $\|u + y\|^2 \leqslant \|u\|^2 + 2\|u\|\ \|y\| + \|y\|^2 = (\|u\| + \|y\|)^2$.
On peut prendre la racine dans cette inégalité car tous les termes sont positifs...

Définition 3 : On appelle distance euclidienne sur $\mathbb{R}^m$, l'application $d : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m & \to & \mathbb{R} \\ (u, y) & \mapsto & \|y - u\| \end{array}$.

Proposition 3

L'application d vérifie les trois propriétés suivantes :
- $\forall u, y \in \mathbb{R}^m,\ d(u, y) = d(y, u)$ *Symétrie*
- $\forall u, y \in \mathbb{R}^m,\ d(u, y) = 0 \implies u = y$ *Séparation*
- $\forall u, y, z \in \mathbb{R}^m,\ d(u, z) \leqslant d(u, y) + d(y, z)$ *Inégalité triangulaire*

Remarque 2 : (exercice)

a. Soit $u,\ y \in \mathbb{R}^m$. On parle de distance de u à y pour $d(u,y)$ ou de distance entre u et y (car on a $d(u,y) = \|y-u\| = \|u-y\| = d(y,u)$).
On peut aussi déduire les propriétés :
- $\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall u, y \in \mathbb{R}^m,\ d(\lambda u, \lambda y) = |\lambda| d(u,y)$.
- $\forall u, y, z \in \mathbb{R}^m,\ d(u+z, y+z) \leqslant d(u,y)$.

b. Vous devez connaître le cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire :
$\forall u, y \in \mathbb{R}^m,\ \|u+y\| = \|u\| + \|y\| \iff u = 0$ ou $\exists \lambda \in \mathbb{R}_+,\ y = \lambda u$.
Commencez par le démontrer en utilisant le cas d'égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Proposition 4 *Inégalité triangulaire-bis*

- $\forall u, y \in \mathbb{R}^m,\ \big|\, \|u\| - \|y\| \,\big| \leqslant \|u-y\|$.
- $\forall u, y, z \in \mathbb{R}^m,\ \big|d(u,z) - d(y,z)\big| \leqslant d(u,y)$.

2. Topologie dans $\mathbb{R}^m$

Boules ouvertes, boules fermées

Définition 4 : Soit $a \in \mathbb{R}^m$, soit $r \in \mathbb{R}_+^*$. On appelle
- boule ouverte de centre a, de rayon r l'ensemble $B(a,r) = \{u \in \mathbb{R}^m \ /\ \|u-a\| < r\}$,
- boule fermée de centre a, de rayon r l'ensemble $\overline{B(a,r)} = \{u \in \mathbb{R}^m \ /\ \|u-a\| \leqslant r\}$.

Parties ouvertes/parties fermées

Définition 5 : Soit A une partie de $\mathbb{R}^m$. On dit que A est
- un ouvert si $\forall a \in A,\ \exists r > 0,$ tel que $B(a,r) \subset A$.
- un fermé si son complémentaire (noté $\complement_{\mathbb{R}^m} A$ ou $\complement A$) dans $\mathbb{R}^m$ est un ouvert.

Exercice 1: Démontrer les affirmations suivantes, faites un dessin dans chaque cas.
- Les boules ouvertes sont des ouverts, les boules fermées sont des fermés.
- Pour $a \in \mathbb{R}^m$, le singleton $\{a\}$ est un fermé de $\mathbb{R}^m$.
- $]0,1[\times]0,1[$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.
- $]0,1]\times]0,1[$ n'est ni ouvert ni fermé dans $\mathbb{R}^2$.

Proposition 5

Une réunion d'ouverts est un ouvert.
Une intersection finie d'ouverts est un ouvert.
Une réunion finie de fermés est un fermé.
Une intersection de fermés est un fermé.

Définition 6 : Soit A une partie de $\mathbb{R}^m$.
On dit que A est **bornée** si il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall u \in A,\ \|u\| \leqslant M$.

Points intérieurs, extérieurs, adhérent, sur la frontière

Définition 7 : Soit A une partie de $\mathbb{R}^m$. On note $\complement A$ le complémentaire de A dans $\mathbb{R}^m$.
Soit $x \in \mathbb{R}^m$, on dit que
- x est un point intérieur à A s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(x,\varepsilon) \subset A$.
- x est un point extérieur à A s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(x,\varepsilon) \subset \complement A$.
- x est un point adhérent à A si pour tout $\varepsilon > 0$, $B(x,\varepsilon) \cap A \neq \emptyset$.
- x est sur la frontière de A si toute boule ouverte de centre x rencontre à la fois A et $\complement A$.

On appelle
- Intérieur de A l'ensemble $\mathring{A} = \{x \in \mathbb{R}^m \ / \ \exists \varepsilon > 0,\ B(x,\varepsilon) \subset A\}$,
- Adhérence de A l'ensemble $\bar{A} = \{x \in \mathbb{R}^m \ / \ \forall \varepsilon > 0,\ B(x,\varepsilon) \cap A \neq \emptyset\}$.
- Frontière de A l'ensemble $\partial A = \{x \in \mathbb{R}^m \ / \ \forall \varepsilon > 0,\ B(x,\varepsilon) \cap A \neq \emptyset$ et $B(x,\varepsilon) \cap \complement A \neq \emptyset\}$.

On vérifiera qu'un point est dit extérieur à A s'il est dans l'intérieur de $\complement A$.
On peut montrer que $\partial A = \bar{A} \setminus \mathring{A}$.

II. FONCTION À VALEURS VECTORIELLES

1. Définition de la limite

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une application de I dans $\mathbb{R}^m$, $f : \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R}^m \\ t & \mapsto & (f_1(t), \ldots, f_m(t)) \end{array}$.

On appelle les applications f_i les applications coordonnées ou composantes de f (ce sont des applications de I dans $\mathbb{R}$).

Définition 8 : Soit $l \in \mathbb{R}^m$ et soit $a \in I$ (ou $a = \pm\infty$ ou $a \in \overline{I}$).
On dit que f **admet** l **pour limite en** a si $\lim\limits_{t \to a} \|f(t) - l\| = 0$,

Traductions : cela se traduit, suivant les cas, par :

- Si $a \in \mathbb{R}$, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, $\forall t \in]a - \delta, a + \delta[\cap I$, $\|f(t) - l\| < \varepsilon$.
- Si $a = +\infty$, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists A \in \mathbb{R}$, $\forall t \in]A, +\infty[\cap I$, $\|f(t) - l\| < \varepsilon$.
- Si $a = -\infty$, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists B \in \mathbb{R}$, $\forall t \in]-\infty, B[\cap I$, $\|f(t) - l\| < \varepsilon$.

De même, on définit **les limites à gauche et à droite de** a, par exemple :
$\lim\limits_{\substack{t \to a \\ t < a}} f(t) = l \iff \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall t \in]a - \delta, a[\cap I, \|f(t) - l\| < \varepsilon.$

Dans le cas où f **est définie sur** $I \setminus \{a\}$, on dira que f admet une limite en a, notée $\lim\limits_{t \to a} f(t)$, si les limites de f à gauche et à droite en a existent et sont égales.

Remarque 3 : on peut travailler dans le cas où $a \notin I$ et $a \in \overline{I}$. L'hypothèse assure alors que l'on peut se rapprocher de a en étant dans I, et on peut parler de limite à droite ou à gauche.

Proposition 6

Soit $f : I \to \mathbb{R}^m$ et $a \in \overline{I}$.
- Si f admet une limite en a alors celle-ci est unique.
- Si f admet une limite en a alors f est bornée au voisinage de a.

Proposition 7

Soit $l = (l_1, \ldots, l_m)$. Soit $a \in \overline{I}$. Soit $f : I \to \mathbb{R}^m$, on note $(f_1, \ldots, f_m)$ ses applications coordonnées.
f admet pour limite l en a si et seulement si pour tout $i \in [\![1, m]\!]$, f_i admet l_i pour limite en a.

démo

Exemple 1

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, on note $f_1 = \mathrm{Re}(f)$ et $f_2 = \mathrm{Im}(f)$. Soit $a \in \mathbb{R}$. Soit $l = l_1 + i l_2 \in \mathbb{C}$ où $(l_1, l_2) \in \mathbb{R}$.
f admet pour limite l en a si et seulement si f_1 et f_2 admet pour limite en a respectivement l_1 et l_2.
Dans ce cas, on a donc $\lim\limits_{t \to a} f(t) = \lim\limits_{t \to a} \mathrm{Re}(f)(t) + i \lim\limits_{x \to a} \mathrm{Im}(f)(t)$.

Les opérations sur les limites restent valables.

2. Continuité

Soit $f : I \to \mathbb{R}^m$ une application définie sur un intervalle ou une partie I de $\mathbb{R}$.

Définition 9 : Soit $a \in I$. On dit que f est continue en a si $\lim\limits_{t \to a} f(t)$ existe et vaut $f(a)$.

Définition 10 : On dit que f est continue sur I si elle est continue en tout $a \in I$.
On note $C^0(I, \mathbb{R}^m)$ l'ensemble de ces applications. C'est un $\mathbb{R}-$espace vectoriel.

Exemple 2 : $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & e^{it} \end{array}$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}$ (à valeurs dans $\mathbb{C}$),

l'application $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^2 \\ t & \mapsto & (\cos t, \sin t) \end{array}$ est continue sur $\mathbb{R}$.

3. Dérivation

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, soit $a \in I$ (ou $a \in \bar{I}$) et f une application de I dans $\mathbb{R}^m$, $f : \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R}^m \\ t & \mapsto & (f_1(t), \dots, f_m(t)) \end{array}$.

Vecteur dérivé

Définition 11 :
On dit que f est **dérivable à gauche** (resp. à droite) en $a \in I$ si $\lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ h<0}} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ (resp. $\lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ h>0}}$) existe.
On appelle alors **vecteur dérivé de f à gauche** (resp. à droite) en a cette limite à gauche (resp. à droite).

Autrement dit, sous réserve d'existence des limites, on a

$$\text{le vecteur dérivé à gauche de } f \text{ en } a : \ f'_g(a) = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h<0}} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{\substack{t \to a \\ t<a}} \frac{f(t)-f(a)}{t-a}.$$

$$\text{le vecteur dérivé à droite de } f \text{ en } a : \ f'_d(a) = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h>0}} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{\substack{t \to a \\ t>a}} \frac{f(t)-f(a)}{t-a}.$$

Ces vecteurs sont dans $\mathbb{R}^m$.

Définition 12 : On dit que f est **dérivable en a** si $\lim\limits_{h \to a} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ existe dans $\mathbb{R}^m$. Cette limite est notée $f'(a)$, et elle est appelée **vecteur dérivé de f en a**.

Proposition 8

- f est dérivable en a si et seulement si elle l'est à gauche et à droite et $f'_d(a) = f'_g(a)$.
- f est dérivable à gauche (resp. à droite) en a si et seulement si chacue des ses applications coordonnées est dérivable à gauche (resp. à droite) en a.
- f est dérivable en a si et seulement si chacune de ses applications coordonnées f_i l'est en a.
  De plus dans ce cas, on a $f'(a) = (f'_1(a), \dots, f'_m(a))$.

Définition 13 :
On dit que f est **dérivable sur une partie** A de $\mathbb{R}$ si elle est dérivable en tout point de A.
On note alors f' l'application de A dans $\mathbb{R}^m$ définie par $t \mapsto f'(t)$. C'est la **fonction dérivée** de f sur I.

Dérivées successives et fonctions de classe C^k

Soit $f : I \to \mathbb{R}^m$. On définit les dérivées successives de f par récurrence (si elles existent) :

- On pose $f^{(0)} = f$.
- Si f est dérivable sur I, on pose $f^{(1)} = f'$.
- Soit $k \in \mathbb{N}$. Supposons que l'on ait pu définir $f^{(k)}$, et que $f^{(k)}$ soit dérivable sur I, alors on pose

$$f^{(k+1)} = (f^{(k)})'$$

Définition 14 :
Pour tout $k \in \mathbb{N}$, si l'on peut définir la fonction $f^{(k)}$ alors on dit que f est k **fois dérivable** sur I, et $f^{(k)}$ est appelée **dérivée kième de f**.
Si $f^{(k)}$ est définie pour tout $k \in \mathbb{N}$, on dit que f est indéfiniment dérivable.

Définition 15 : Soit $f : I \to \mathbb{R}^m$. Soit $k \in \mathbb{N}$.

- On dit que f est **de classe** $\mathscr{C}^k$ sur I si f est k fois dérivable sur I et $f^{(k)}$ est continue sur I.
  L'ensemble des fonctions de classe $\mathscr{C}^k$ sur I est noté $\mathscr{C}^k(I, \mathbb{R}^m)$.
- On dit que f est **de classe** $\mathscr{C}^\infty$ sur I si f est indéfiniment dérivable sur I.
  L'ensemble des fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur I à valeurs dans $\mathbb{R}^m$ est noté $\mathscr{C}^\infty(I, \mathbb{R}^m)$.

Proposition 9

Soit $f : I \to \mathbb{R}^m$. On note $(f_1, \dots, f_m)$ les applications composantes de f. f est de classe $\mathscr{C}^n$ de I dans $\mathbb{R}^m$ si et seulement si, pour tout $i \in [\![1, m]\!]$, f_i est de classe $\mathscr{C}^n$ de I dans $\mathbb{R}$.

Exemple 3

a. Soit $\alpha \in \mathbb{C}$ et soit $n \in \mathbb{N}^*$. On définit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ x & \mapsto & (x-\alpha)^n \end{array}$.
f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ (à valeurs dans $\mathbb{C}$) et,
pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a si $k \leqslant n$ $\forall x \in \mathbb{R},\ f^{(k)}(x) = n(n-1)\dots(n-k+1)\ (x-\alpha)^{n-k}$,
si $k > n$ $\forall x \in \mathbb{R},\ f^{(k)}(x) = 0$

b. Soit $\alpha \in \mathbb{C}$. On définit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & e^{\alpha t} \end{array}$.

f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\forall t \in \mathbb{R},\ f^{(n)}(t) = \alpha^n\ e^{\alpha t}$.

4. Opérations sur les dérivées

Proposition 10

Soient $f, g : I \to \mathbb{R}^m$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $a \in I$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.
On suppose que f et g sont dérivables en a (resp. sur I).

- les applications $f+g$ et λf sont dérivables en a (resp. sur I). On a

$$(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a) \qquad \text{et} \qquad (\lambda f)'(a) = \lambda f'(a)\,.$$

- Soit $\alpha : I \to \mathbb{R}$ une application dérivable en a (resp. sur I). L'application αf est dérivable en a (resp. sur I) et

$$(\alpha f)'(a) = \alpha'(a)\ f(a) + \alpha(a)\ f'(a).$$

Proposition 11

Soient $f, g : I \to \mathbb{R}^m$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on suppose que f et g sont n fois dérivables sur I.
Les applications $f+g$ et λf sont n fois dérivables sur I. On a

$$(f+g)^{(n)} = f^{(n)} + g^{(n)} \qquad \text{et} \qquad (\lambda f)^{(n)} = \lambda f^{(n)}$$

Soient $f : I \to \mathbb{R}^m$ et $\alpha : I \to \mathbb{R}$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on suppose que f et α sont n fois dérivables sur I. Alors αf est n fois dérivable sur I et on a la **formule de Leibniz**

$$(\alpha f)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} \alpha^{(k)} f^{(n-k)}\,.$$

Remarque : On peut énoncer des résultats similaires pour les fonctions de classe C^n de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^m$. Quelle structure peut-on mettre sur l'ensemble des fonctions de classe C^n ?

Dérivation d'un produit scalaire de deux applications de I dans $\mathbb{R}^2$ (ou $\mathbb{R}^3$)

Soient $f, g : I \to \mathbb{R}^m$ pour $m \in \{2, 3\}$. On munit $\mathbb{R}^m$ du produit scalaire usuel.
On note $h = (f|g)$ le produit scalaire de f et g, défini par : $h : \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & (f(t)|g(t)) \end{array}$.

Proposition 12

Si f et g sont dérivables en a (resp. sur I), alors h l'est aussi et $h'(a) = (f'(a)|g(a)) + (f(a)|g'(a))$.

On démontre ceci à partir de la formule $h = \sum_{i=1}^{n} f_i g_i$ où $(f, \dots, f_m)$ et $(g_1, \dots g_m)$ désignent les applications composantes de f et g (par exemple pour $m = 2$, on note (f_1, f_2), (g_1, g_2) les applications composantes de f et g et $h = f_1 g_1 + f_2 g_2$) et des propriétés sur la dérivation des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

On retiendra, pour f et g dérivables sur I : $\boxed{(f|g)' = (f'|g) + (f|g')}$.

Dérivation d'un produit vectoriel de deux applications

Soient $f, g : I \to \mathbb{R}^3$.

On note $w = f \wedge g$ le produit scalaire de f et g, défini par : $w : \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R}^3 \\ t & \mapsto & f(t) \wedge g(t) \end{array}$.

Proposition 13

Si f et g sont dérivables en a (resp. sur I), alors w l'est aussi et $w'(a) = f'(a) \wedge g(a) + f(a) \wedge g'(a)$.

On démontre ceci à partir de la formule $w = (f_2g_3 - f_3g_2, f_3g_1 - f_1g_3, f_1g_2 - f_2g_1)$ (ici (f_1, f_2, f_3), (g_1, g_2, g_3) les applications composantes de f et g) et des propriétés sur la dérivation des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

On retiendra, pour f et g dérivables sur I : $\boxed{(f \wedge g)' = f' \wedge g + f \wedge g'}$.

Formule de Leibniz

Proposition 14

- Soient $f, g : I \to \mathbb{R}^m$ (avec $m = 2$ ou $m = 3$) n fois dérivables sur I. L'application $(f|g)$ est n fois dérivable sur I et
$$(f|g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (f^{(k)}|g^{(n-k)}) .$$
- Soient $f, g : I \to \mathbb{R}^3$ n fois dérivables sur I. L'application $f \wedge g$ est n fois dérivable sur I et
$$(f \wedge g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} \wedge g^{(n-k)} .$$

démo : ces résultats se démontrent par récurrence, mais avant d'écrire une dérivée vous devez penser à justifier que la fonction est dérivable.

Par exemple pour le 2), on initialise à $n = 1$ (déjà vu) et pour l'hérédité, on écrit : Soient f et g deux fonctions $n+1$ fois dérivables. f et g sont dérivables, donc $(f|g)$ est dérivable et $(f|g)' = (f'|g) + (f|g')$ est la somme de deux produits scalaires d'applications qui sont n fois dérivables, donc par l'hypothèse de récurrence, elle est également n fois dérivable. Donc $(f|g)$ est $n+1$ fois dérivable.

On montre ensuite la formule, comme on l'a fait pour les polynômes, ou pour le binôme de Newton...à partir de $(f|g)^{(n+1)} = ((f|g)^{(n)})'$.

5. Formule de Taylor-Young

Définition 16 : Soient $f : I \to \mathbb{R}^m$ et $\varphi : I \to \mathbb{R}$. Soit $a \in I$ (ou $a \in \overline{I}$ ou $a = \pm\infty$).

- On dit que f est dominée par φ au voisinage de a si il existe $\zeta : I \to \mathbb{R}$ bornée sur un ouvert contenant a telle que $\forall t \in I,\ \|f(t)\| = \zeta(t)\ \varphi(t)$. On note alors $f = O(\varphi)$.
- On dit que f est négligeable devant φ au voisinage de a si il existe $\varepsilon : I \to \mathbb{R}$ qui admet 0 pour limite en a telle que $\forall t \in I,\ \|f(t)\| = \varepsilon(t)\ \varphi(t)$. On note alors $f = o(\varphi)$.
- Soit $g : I \to \mathbb{R}^m$. On dit que f est équivalente à g si $f - g = o(\|g\|)$ au voisinage de a. On note $f \underset{a}{\sim} g$.

Définition 17 : Soit $a \in \mathbb{R}$, on dit que $f : I \to \mathbb{R}^m$ admet un **développement limité en** a à l'ordre n s'il existe des vecteurs $V_0,\ V_1,\ \dots,\ V_n$ de $\mathbb{R}^m$ tels que $\forall t \in I$, $f(t) = \sum_{k=0}^{n} (t-a)^k V_k + o((t-a)^n)$.

On note $(f_1, \dots, f_m)$ les applications composantes de f. f admet un $DL_n(a)$ si et seulement si, pour tout $i \in [\![1, m]\!]$, f_i admet un $DL_n(a)$.

Proposition 15 *Formule de Taylor-Young*

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $a \in I$.
Soit f une fonction de I dans $\mathbb{R}^m$ de classe C^n sur I.
f admet alors un développement limité à l'ordre n en a et

$$\forall t \in I,\ f(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(t-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + o((t-a)^n)\ .$$

Gottfried von Leibniz (1646-1716) Grace Chisholm-Young (1863-1944) Brook Taylor (1685-1731)
travaillait avec son mari, William Henri Young (1863-1942), bizarrement plus connu