Travail du cours : *Commencez par apprendre votre cours, et cherchez à le mémoriser (définitions, propriétés). Ensuite, testez-vous sur les questions de la fiche sans avoir le cours sous les yeux. S'il vous manque des réponses, ou si vos réponses sont incomplètes (ou si vous vous apercevez qu'elles sont fausses après vérification), reprenez votre cours en ciblant les notions de la fiche.*

Fiche 1 :
Questions de cours :

1. Soit (u_n) une suite de réels ou de complexes. Définir les termes suivants et en donner les notations :

- la série de terme général u_n est
- la somme partielle de rang N de la série est
- la série converge si
- la somme de la série est
- le reste de rang N de la série est

2. Démontrer que si la série $\sum u_n$ converge alors la suite (u_n) converge.

3. Qu'est-ce qu'une série géométrique ? Énoncer tous les résultats sur ce type de série.

Corrigé

Fiche 2 :
Questions de cours :

1. On considère des séries à termes réels positifs.

- Énoncer le premier résultat de comparaison (par inégalité) :
- Démontrer ce résultat.

2. Montrer que la série $\sum \frac{1}{k}$ diverge.

3. Qu'est-ce qu'une série de Riemann ? Énoncer tous les résultats concernant ce type de série.

Corrigé

Fiche 3 :
Questions de cours :

1. Soit $x \in]-1, 1[$. Montrer que $\sum_{n \geqslant 0} x^n$ converge et calculer sa somme.

2. Définir l'absolue convergence.

3. Énoncer le critère de D'Alembert.

Exercice : En utilisant une comparaison série-intégrale, étudier la convergence de $\sum \frac{(\ln n)^2}{n}$.

Corrigé

Fiche 4 :
Questions de cours :

1. Montrer que si une série à termes réels est absolument convergente alors elle est convergente.

2. Donner la définition d'un produit de Cauchy de deux séries.
Énoncer le théorème relatif au produit de Cauchy.
Montrer que $\sum_{n\geqslant 1} \frac{n+1}{2^n}$ est une série convergente et calculer sa somme.

Corrigé

CORRIGÉS

Fiche 1 :
Questions de cours :

1. Soit (u_n) une suite de réels ou de complexes. Définir les termes suivants et en donner les notations :

   - la série de terme général u_n : C'est la suite $(\sum_{n=0}^{N} u_n)_{N\in\mathbb{N}}$, elle est notée $\sum u_n$ ou $\sum_{n\geqslant 0} u_n$. On note $S_N = \sum_{n=0}^{N} u_n$ la somme partielle de rang N pour $N \in \mathbb{N}$.
   - la série converge si la suite des sommes partielles $(\sum_{n=0}^{N} u_n)_{N\in\mathbb{N}}$ est convergente.
   - la somme de la série est la limite de la suite des sommes partielles $S = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$, c'est donc un réel ou un complexe..
   - le reste de rang N de la série est $R_N = S - S_N = \sum_{n=N+1}^{+\infty} u_n$.

2. Démontrer que si une série $\sum u_n$ converge alors la suite (u_n) converge.
On pose $S_N = \sum_{n=0}^{N} u_n$ pour $N \in \mathbb{N}$. On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = S_n - S_{n-1}$.
Puisque (S_N) converge (hypothèse), on déduit que $\lim_{n\to+\infty} S_n - S_{n-1} = 0$. Et voilà.

3. Qu'est-ce qu'une série géométrique ? Énoncer tous les résultats sur ce type de série.
Une série géométrique est une série du type : $\sum x^n$ avec $x \in \mathbb{R}$ ou $x \in \mathbb{C}$.
Si $x \in \mathbb{R}$: $\sum x^n$ converge si et seulement si $x \in]-1,1[$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ dans ce cas. Si $x \in \mathbb{C}$: $\sum x^n$ converge si et seulement si $|x| < 1$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ dans ce cas.
La preuve utilise l'expression de la somme des premiers termes d'une suite géométrique.

Retour énoncé

Fiche 2 :
Questions de cours :

1. On considère des séries à termes réels positifs.

- Énoncer le premier résultat de comparaison (par inégalité) : Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes dans $\mathbb{R}_+$.

  Si $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant u_n \leqslant v_n$ et $\sum v_n$ converge alors $\sum u_n$ converge et on a $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$.
- Démontrer ce résultat.
  On considère la suite des sommes partielles : (S_N) est une suite croissante. On montre qu'elle est majorée et on conclut qu'elle converge.
  L'hypothèse de comparaison permet de montrer que $\forall N \in \mathbb{N},\ S_N \leqslant T_N$ où T_N désigne la somme partielle de rang N de $\sum v_n$.
  L'hypothèse que la série $\sum v_n$ converge permet d'affirmer que (T_N) est convergente donc majorée.
  ainsi (S_N) est majorée donc elle converge.

2. Montrer que la série $\sum \frac{1}{k}$ diverge.
On propose ici une démonstration différente de celle du cours.
On sait que la fonction $t \mapsto \frac{1}{t}$ est décroissante sur $[1, +\infty[$.
Donc pour $n \in \mathbb{N}^*$, on peut écrire $\forall t \in [n, n+1],\ \frac{1}{t} \leqslant \frac{1}{n}$. Et en intégrant ceci sur le segment $[n, n+1]$, on trouve $\int_n^{n+1} \frac{1}{t}\,dt \leqslant \frac{1}{n}$, donc $\ln(n+1) - \ln n \leqslant \frac{1}{n}$.
Fixons $N \in \mathbb{N}^*$ et faisons la somme de ces inégalités pour n variant de 1 à N : $\sum_{n=1}^{N}(\ln(n+1) - \ln n) \leqslant \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}$.
La première somme est téléscopique donc on obtient $\ln(N+1) \leqslant S_N$.
Par conmparaison de suites, comme $\lim_{N\to+\infty} \ln(N+1) = +\infty$, on conclut que $\sum \frac{1}{n}$ diverge.

3. Qu'est-ce qu'une série de Riemann ? Énoncer tous les résultats concernant ce type de série.
On appelle série de Riemann les séries de la forme $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$.
On ne considère en général que les α strictement positifs, car si $\alpha \leqslant 0$, alors la série diverge grossièrement (i.e. le terme général ne tend pas vers 0.)
Le principal résultat est :

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. La série $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ est convergente si et seulement si $\alpha > 1$.

Il se démontre par comparaison avec la série $\sum \frac{1}{n}$ (DV) pour $\alpha < 1$, avec la série $\sum \frac{1}{n^2}$ (CV) pour $\alpha > 2$, et par comparaison série-intégrale pour $\alpha \in]1, 2[$.

Retour énoncé

Fiche 3 :
Questions de cours :

1. Soit $x \in]-1, 1[$. Montrer que $\sum_{n\geqslant 0} x^n$ converge et calculer sa somme.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum_{k=0}^{n} x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1-x} = \frac{1}{1-x} - \frac{x^{n+1}}{1-x}$. Et on conclut en étudiant la suite $(\frac{x^{n+1}}{1-x})_{n\in\mathbb{N}}$.
La suite $(x^{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ converge si et seulement si $x \in]-1, 1]$.
Comme $x \in]-1, 1[$, on conclut que (S_n) converge.
Et la somme de la série est $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$.

2. Définir l'absolue convergence.
Soit (u_n) une suite réelle ou complexe. On dit que la série $\sum u_n$ est absolument convergente si la série $\sum |u_n|$ converge.

3. Énoncer le critère de D'Alembert.
Soit (u_n) une suite à termes réels ou complexes, telle que $u_n \neq 0$ à partir d'un certain rang.
On suppose que et que $\lim\limits_{n\to+\infty} \left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right|$ existe et est finie. On note L cette limite, qui est dans $[0,+\infty[$.
Si $L<1$ alors la série $\sum u_n$ est absolument convergente, si $L>1$ alors la série diverge.

Exercice : En utilisant une comparaison série-intégrale, étudier la convergence de $\sum \dfrac{(\ln n)^2}{n}$.

➢ On pose $f\ :\ t \mapsto \frac{(\ln t)^2}{t}$. On montre que cette fonction est continue et décroissante sur $[e^2,+\infty[$.
Soit $n \geqslant 10$, (f est décroissante sur $[10,+\infty[$ car $e^2 \leqslant 9$), $\forall t \in [n,n+1],\ f(n+1) \leqslant f(t) \leqslant f(n)$. On intègre sur le segment $[n,n+1]$, $f(n) \leqslant \displaystyle\int_n^{n+1} f(t)\ dt \leqslant f(n)$.
Soit $N \in \mathbb{N}$ supérieur à 10, on somme les inégalités pour n variant de 10 à N :
$$\sum_{n=10}^{N} f(n+1) \leqslant \sum_{n=10}^{N}\int_n^{n+1} f(t)\ dt \leqslant \sum_{n=10}^{N} f(n).$$
On pose $S_N = \displaystyle\sum_{n=1}^{N} f(n)$, et on traduit ce qui précède en ne conservant que l'inégalité de droite :
$$\int_{10}^{N+1} f(t)\ dt \leqslant S_N - S_9.$$
On calcule l'intégrale : $\displaystyle\int_{10}^{N+1} f(t)\ dt = \left[\frac{(\ln t)^3}{3}\right]_{10}^{N+1} = \frac{1}{3}((\ln(N+1))^3 - (\ln 10)^3)$.
Ainsi on a obtenu $\underbrace{\frac{1}{3}((\ln(N+1))^3 - (\ln 10)^3) + S_9}_{\underset{n\to+\infty}{\to+\infty}} \leqslant S_N$.
Ce qui permet de conclure par théorème de minoration que la suite (S_N) tend vers $+\infty$, donc la série étudiée diverge.

Retour énoncé

Fiche 4 :

Questions de cours :

1. Montrer que si une série à termes réels est absolument convergente alors elle est convergente.
Soit $\sum u_n$ une série réelle absolument convergente.
➢ On pose, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $v_n = |u_n|$ et $w_n = |u_n| - u_n$. Les suites (v_n) et (w_n) sont à termes positifs.
➢ La série $\sum v_n$ converge par hypothèse.
La série $\sum w_n$ aussi car elle est à termes positifs, on a $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant w_n \leqslant 2|u_n|$ et la série $\sum |u_n|$ converge, on conclut par théorème de comparaison de séries à termes positifs.
➢ On a $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_n = v_n - w_n$. On en déduit que $\sum u_n$ converge, par somme de séries convergentes.
Remarque : on peut aussi utiliser les deux suites positives définies par $u_n^+ = \sup(u_n, 0)$ *et* $u_n^- = \sup(0,-u_n)$. *Reproduire la démonstration.*

2. Donner la définition d'un produit de Cauchy de deux séries.
Soient (a_n) et (b_n) deux suites de réels ou de complexes.
Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on pose $c_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$. La série $\sum c_n$ est le produit de Cauchy des séries $\sum a_n$ et $\sum b_n$.
Énoncer le théorème relatif au produit de Cauchy.
Soient (a_n) et (b_n) deux suites de réels ou de complexes.
Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on pose $c_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$.
Si $\sum a_n$ et $\sum b_n$ sont absolument convergentes, alors la série $\sum c_n$ est absolument convergente et on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n\right).$$

Montrer que $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{n+1}{2^n}$ est une série convergente et calculer sa somme.

On utilise le résultat précédent avec $a_n = b_n = \dfrac{1}{2^n}$.

La série $\displaystyle\sum \frac{1}{2^n}$ est géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$ donc elle converge absolument et sa somme vaut $\dfrac{1}{1-1/2} = \dfrac{1}{2}$.

Le produit de Cauchy sera $\sum c_n$ avec, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $c_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k}\frac{1}{2^{n-k}} = \frac{n+1}{2^n}$. D'après le résultat, $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{n+1}{2^n}$ converge absolument et sa somme vaut $\dfrac{1}{4}$.

Retour énoncé