**Travail du cours** : *Commencez par apprendre votre cours, et cherchez à le mémoriser (définitions, propriétés). Ensuite, testez-vous sur les questions de la fiche sans avoir le cours sous les yeux. S'il vous manque des réponses, ou si vos réponses sont incomplètes (ou si vous vous apercevez qu'elles sont fausses après vérification), reprenez votre cours en ciblant les notions de la fiche.*

**Sur les espaces vectoriels**

**Fiche 1 :**
*Question de cours* :

**1.** Soit $E$ un $\mathbb{K}-$espace vectoriel et $(u_1, \dots, u_n)$ une famille de vecteurs de $E$. Donner les définitions de

- La famille $(u_i)_{1 \leq i \leq n}$ est libre.

- La famille $(u_i)_{1 \leq i \leq n}$ est liée.

- La famille $(u_i)_{1 \leq i \leq n}$ est génératrice.

**2.** À quelle condition peut-on ajouter un vecteur $u$ à une famille libre et avoir encore une famille libre ? Énoncer la propriété correspondante et la démontrer.

**3.** Donner la définition de $\mathcal{B} = (u_1, \dots, u_n)$ est une base de $E$. Donner la définition des coordonnées d'un vecteur $u$ dans une base $\mathcal{B}$.

Corrigé

**Fiche 2 :**

*Question de cours* :

**1.** Énoncer le théorème de la base incomplète.

**2.** Compléter les phrases suivantes :
Soit $E$ un espace vectoriel de dimension $n$. Soit $(e_1, \dots, e_p)$ une famille de vecteurs de $E$.

- Si $(e_1, \dots, e_p)$ est une famille libre, alors (*Comparer $p$ et $n$*)
- Si $(e_1, \dots, e_p)$ est une famille génératrice alors

**3.** Quelle est la définition de la dimension d'un espace vectoriel de dimension finie ?

Corrigé

**Fiche 3 :**

*Question de cours* : Soit $E$ un $\mathbb{K}-$espace vectoriel.

**1.** Comment montrer qu'un ensemble $F \subset E$ est un sous-espace vectoriel de $E$ ?

**2.** Donner la définition puis la caractérisation de $F_1$ et $F_2$ sont supplémentaires dans $E$ :

**3.** Soient $E_1, \ldots, E_p$ des sous-espaces de $E$.
Donner la définition puis la caractérisation de $E_1, \ldots, E_p$ sont en somme directe :

**4.** On suppose que $E$ est de dimension finie. Comment peut-on démontrer que $F_1$ et $F_2$ sont supplémentaires dans $E$ en utilisant cette hypothèse ?

Corrigé

**Fiche 4 :**

*Question de cours* : Soit $E$ un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension $p$

**1.** Compléter les phrases suivantes :

Toute famille génératrice de $E$ d'exactement $p$ vecteurs est

Toute famille libre de $E$ ... est une

**2.** Énoncer la formule de Grassmann.

**3.** Définir la notion de base adaptée à des supplémentaires $F$ et $G$ de $E$.
Énoncer les propriétés liées à ce résultat.

Corrigé

**Fiche 5 :**

*Question de cours*

**1.** Donner la définition du rang d'une famille de vecteurs :

**2.** Donner la définition d'un hyperplan :

**3.** Énoncer la formule de Grassmann :

**4.** Dans $E$ un $\mathbb{K}-$ev de dimension finie, donner les relations entre les dimensions de deux supplémentaires.
Que peut-on dire sur les dimensions si $E_1 \bigoplus \cdots \bigoplus E_p = E$ ?

Corrigé

**Sur les applications linéaires**

**Fiche 6 :**

*Question de cours* :

**1.** Soient $E$, $F$ deux $\mathbb{K}-$espaces vectoriels.

  **a.** Donner la définition d'une application linéaire $f$ de $E$ dans $F$.

  **b.** Donner la définition de $\text{Im}f$ et de $\ker f$.

  **c.** Démontrer que $\ker f$ est un sous-espace vectoriel de $E$.

**2.** Donner la définition et la notation de la matrice d'une application linéaire dans des bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ de $E$ et $F$ respectivement.

**3.** Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de $E$. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Donner une description de $\text{Im}f$ à l'aide de $\mathcal{B}$.

*Exercice*

Montrer que l'application $\varphi \ : \ \begin{array}{ccc} C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}) & \to & C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}) \\ f & \mapsto & f' + 2f \end{array}$ est un endomorphisme.

Déterminer le noyau de $\varphi$.

Corrigé

**Fiche 7 :**

*Question de cours* :

**1.** Définir le rang d'une application linéaire.

**2.** Énoncer les résultats liant la surjectivité/l'injectivité de $f$ à $\text{Im}f$ et $\ker f$.

**3.** Soient $E$ et $F$ deux $\mathbb{K}-$espaces vectoriels. On suppose que $f$ est un isomorphisme de $E$ dans $F$. Que signifie cette hypothèse ?
On suppose de plus que $E$ est de dimension finie, que dire alors de $F$ ?
Montrer que $f^{-1}$ est un isomorphisme de $F$ dans $E$.

*Exercice*

Soit $E$ un $\mathbb{R}-$espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On pose $F = \{x \in E \ / \ f(x) = \lambda x\}$.
Justifier que $F$ est un sous-espace vectoriel de $E$.

Corrigé

**Fiche 8 :**

*Question de cours* :

1. Donner la définition d'un isomorphisme. Donner une caractérisation de " $f$ est un isomporphisme de $E$ dans $F$ " qui utilise les matrices.

2. Quel est le lien entre produit de matrices et applications linéaires ?

3. Donner l'ensemble des caractérisation d'une matrice inversible.

4. Vrai ou Faux ? *Soient $E$ et $F$ des $\mathbb{K}-$espaces vectoriels. Soit $(e_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ une famille de vecteurs de $E$ et $(v_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ une famille de vecteurs de $F$. Il existe une unique application linéaire $f$ de $E$ dans $F$ telle que $\forall i \in I,\ f(e_i) = v_i$.*

5. Compléter :
   Soient $E,\ F$ deux $\mathbb{K}-$espaces vectoriels et soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$. On suppose que $E$ est            et on note $\mathcal{B} = (e_1,\ldots,e_n)$ une base de $E$.
   $f$ est surjective si et seulement si $(f(e_1),\ldots,f(e_n))$ est une            de $F$.
   $f$ est injective si et seulement si $(f(e_1),\ldots,f(e_n))$ est une            de $F$.
   $f$ est bijective si et seulement si $(f(e_1),\ldots,f(e_n))$ est une            de $F$.

*Exercice*

Soient $u$ et $v$ deux endomorphismes d'un espace vectoriel $E$. Montrer que

$$u \circ v = 0 \iff \mathrm{Im} v \subset \ker u$$

Corrigé

**Fiche 9 :**

*Question de cours* :

1. On suppose $E$ de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$, démontrer que $f$ est bijective si et seulement si $f$ est injective. *On dira que c'est une caractérisation des automorphismes en dimension finie, qu'est-ce qu'un automorphisme au fait ?*

2. Soit $p$ un projecteur de $E$. Qu'est-ce qu'un projecteur ?
   Que pouvez-vous dire de $\mathrm{Im} p$ et $\ker p$ ?

3. Énoncer le théorème du rang.

*Exercice*

Soit $\varphi : \begin{array}{ccc} C^0([0,1],\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R} \\ f & \mapsto & \displaystyle\int_0^1 f(t)\ dt \end{array}$. Montrer que $f$ est une forme linéaire.

Corrigé

**Fiche 10 :**

*Question de cours* :

**1.** Définir une projection vectorielle et une symétrie vectorielle.

**2.** Soit $p$ un projecteur d'un $\mathbb{K}-$espace vectoriel $E$. Montrez que $\text{Im}p = \{x \in E \ / \ p(x) = x\}$.

**3.** Définir la somme directe de plusieurs sous-espaces vectoriels $F_1, \ldots, F_p$ d'un $\mathbb{K}-$ev $E$.

**4.** Définir la notion de projecteurs associés à la décomposition de $E$ en somme directe $E = \bigoplus_{i=1}^{p} F_p$.

*Exercice*

Soit $p,\ q$ deux projecteurs de $E$. Montrer que $p \circ q = p$ si et seulement si $\ker q \subset \ker p$.
Donner un exemple de tels projecteurs.

Corrigé

## CORRIGÉS

**Fiche 1 :**
*Question de cours* :

1. Soit $E$ un $\mathbb{K}-$espace vectoriel et $(u_1, \dots, u_n)$ une famille de vecteurs de $E$. Donner les définitions de

   - La famille $(u_i)_{1 \leq i \leq n}$ est libre.
     La famille $(u_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ est **libre** si $\forall (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$, $\left( \sum_{i=0}^{n} \lambda_i u_i = 0_E \Longrightarrow \lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0 \right)$.
     Cela se dit aussi : la seule CL nulle des $u_i$ est obtenue avec des coefficients tous nuls.
     On dit également que **les vecteurs sont linéairement indépendants**. On retiendra la propriété suivante :
     Soit $(u_i)_{1 \leq i \leq n}$ une famille libre et soit $x \in \text{Vect}(u_1, \dots, u_n)$. L'écriture de $x$ comme CL des $u_i$ est unique.

   - La famille $(u_i)_{1 \leq i \leq n}$ est liée.
     La famille $(u_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ est **liée** si elle n'est pas libre (i.e. il existe une CL nulle de ces vecteurs formée avec des coefficients *non tous nuls*).
     On retiendra la caractérisation suivante :
     Une famille $(u_i)_{1 \leq i \leq n}$ est liée si et seulement si l'un au moins des vecteurs $u_i$ s'écrit comme une combinaison linéaire des autres.
   - La famille $(u_i)_{1 \leq i \leq n}$ est génératrice.
     La famille $(u_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ est génératrice de $E$ si tout vecteur de $E$ peut s'écrire comme une CL des $(u_i)$, autrement dit $E = \text{Vect}(u_1, \dots, u_n)$.

2. À quelle condition peut-on ajouter un vecteur $u$ à une famille libre et avoir encore une famille libre ?
   La condition est que le nouveau vecteur ne soit pas CL des premiers (qui forment une famille libre). Énoncer la propriété correspondante et la démontrer.
   Soit $(u_i)_{1 \leq i \leq n}$ une famille libre. Soit $u \in E$.
   Si $u$ n'est pas CL des $u_i$ alors la famille $(u_1, u_2, \dots, u_n, u)$ est libre.
   démo : On considère donc une famille libre et un vecteur $u$ qui n'est pas CL des $u_i$.
   On veut montrer que la famille $(u_1, u_2, \dots, u_n, u)$ est libre : soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n, \lambda \in \mathbb{K}$, on suppose que $\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_n u_n + \lambda u = 0_E$.
   On veut montrer que tous les coefficients de cette CL sont nuls.
   On remarque d'abord que $\lambda = 0$ sinon on peut diviser par $\lambda$ et écrire $u$ comme une CL des $u_i$, ce qui est contraire à l'hypothèse.
   Donc on a $\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_n u_n = 0_E$, et comme la famille $(u_1, \dots, u_n)$ est supposée libre, on conclut que $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$.
   Tous les coefficients sont nuls, donc la famille $(u_1, \dots, u_n, u)$ est une famille libre.

3. Donner la définition de $\mathcal{B} = (u_1, \dots, u_n)$ est une base de $E$. Donner la définition des coordonnées d'un vecteur $u$ dans une base $\mathcal{B}$.
   La famille $(u_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ est une base de $E$ si elle est libre et génératrice de $E$. Soit $\mathcal{B} = (u_i)_{1 \leq i \leq n}$ une base de $E$.
   Tout vecteur de $E$ se décompose de manière unique comme CL des $u_i$ :
   $\forall x \in E$, $\exists (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ unique dans $\mathbb{K}^n$ tel que $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i$.
   Les $\lambda_i$ ainsi définis pour $x \in E$ sont appelés **coordonnées (ou composantes)** de $x$ dans la base $(e_1, \dots, e_n)$.

Retour énoncé

**Fiche 2 :**

*Question de cours* :

1. Enoncer le théorème de la base incomplète.
   Soit une famille $\mathcal{F}$ génératrice finie de $E$, soit $\mathcal{G}$ famille libre formée de vecteurs de $\mathcal{F}$.
   Il existe une famille finie $\mathcal{L}$, contenant $\mathcal{G}$ et incluse dans $\mathcal{F}$, qui est une base de $E$.
   Énoncés qui s'en déduisent :

- Dans tout $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension finie non nul, il existe une base.
- De toute famille génératrice finie de $E$, on peut extraire une base de $E$.
- On peut compléter toute famille libre de $E$ en une base de $E$.

**2.** Compléter les phrases suivantes :
Soit $E$ un espace vectoriel de dimension $n$. Soit $(e_1, \ldots, e_p)$ une famille de vecteurs de $E$.

**a.** Si $(e_1, \ldots, e_p)$ est une famille libre, alors $p \leq n$

**b.** Si $(e_1, \ldots, e_p)$ est une famille génératrice alors $n \leq p$

Retour énoncé

**Fiche 3 :**
*Question de cours* : Soit $E$ un $\mathbb{K}-$espace vectoriel.

- Comment montrer qu'un ensemble $F \subset E$ est un sous-espace vectoriel de $E$ ?
On montre que $F$ est non vide (en général, on montre que $0_E \in F$). Puis on montre que $\forall x,\ y \in F,\ \forall \lambda,\ \mu \in \mathbb{K},\ \lambda x + \mu y \in F$ (on dit que $F$ est stable par combinaison linéaire).

- Donner la définition puis la caractérisation de $F_1$ et $F_2$ sont supplémentaires dans $E$ :
Définition : On dit que deux sous-espaces $F_1$ et $F_2$ de $E$ sont **supplémentaires dans** $E$ si tout vecteur $x$ de $E$ s'écrit de manière unique comme la somme d'un vecteur de $F_1$ et d'un vecteur de $F_2$.
On note alors $F_1 \bigoplus F_2 = E$.
Caractérisation : $F_1$ et $F_2$ de $E$ sont supplémentaires dans $E$ si et seulement si $F_1 \cap F_2 = \{0\}$ et $E = F_1 + F_2$.
En dimension finie :
$F_1$ et $F_2$ de $E$ sont supplémentaires dans $E$ si et seulement si $\dim E = \dim F_1 + \dim F_2$ et $F_1 \cap F_2 = \{0\}$.
$F_1$ et $F_2$ de $E$ sont supplémentaires dans $E$ si et seulement si $\dim E = \dim F_1 + \dim F_2$ et $F_1 + F_2 = E$.

- Soient $E_1, \ \ldots, \ E_p$ des sous-espaces de $E$.
Donner la définition puis la caractérisation de $E_1, \ \ldots, \ E_p$ sont en somme directe :
Définition : On dit que les $E_i$ sont **en somme directe** si tout vecteur de $E_1 + \cdots + E_p$ s'écrit de manière unique comme une somme d'un vecteur de $E_1$, ..., d'un vecteur de $E_p$.
On note alors $E_1 \bigoplus \cdots \bigoplus E_p$ pour désigner la somme directe des $E_i$.
Caractérisation : La somme des $E_i$ est directe si et seulement si

$$\left.\begin{array}{l} u_1 \in E_1,\ u_2 \in E_2, \ldots u_p \in E_p \\ u_1 + u_2 + \cdots + u_p = 0 \end{array}\right\} \implies u_1 = u_2 = \cdots = u_p = 0\ .$$

Retour énoncé

**Fiche 4 :**
*Question de cours* : Soit $E$ un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension $p$

**1.** Compléter les phrases suivantes :

Toute famille génératrice de $E$ d'exactement $p$ vecteurs est une base de $E$.

Toute famille libre de $E$ d'exactement $p$ vecteurs est une base de $E$.

**2.** Énoncer la formule de Grassmann.
Soit $E$ un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension finie. Soient $F_1$ et $F_2$ deux sous-espaces de $E$.
On a $\dim(F_1 + F_2) = \dim F_1 + \dim F_2 - \dim(F_1 \cap F_2)$.

**3.** Définir la notion de base adaptée à des supplémentaires $F$ et $G$ de $E$.
Énoncer les propriétés liées à ce résultat.
Une base adaptée à une décomposition en supplémentaires $F \bigoplus G = E$ est une base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ de $E$ telle que $(e_1, \ldots, e_p)$ soit une base de $F$ et $(e_{p+1}, \ldots, e_n)$ soit une base de $G$ (avec ici $p = \dim F$). Voici des propriétés en lien avec cette notion :

- Soit $F_1$ un sous-espace vectoriel de $E$ Soit $\mathcal{B}_1$ une base de $F_1$.
  **a.** Si $\mathcal{B}_2$ est une famille de vecteurs de $E$ telle que $\{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2\}$ forme une base de $E$, alors $F_2 = \text{Vect}(\mathcal{B}_2)$ est un supplémentaire de $F_1$ dans $E$.
  **b.** Si $F_2$ est un supplémentaire de $F_1$ dans $E$ et si $\mathcal{B}_2$ est une base de $F_2$ alors $\{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2\}$ forme une base de $E$.
- Si $(e_1, \ldots, e_n)$ est une famille libre d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel $E$, alors pour tout $2 \leq p \leq n-1$, les sous-espaces $\text{Vect}(e_1, \ldots, e_p)$ et $\text{Vect}(e_{p+1}, \ldots, e_n)$ sont en somme directe.
- Si $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel $E$, alors pour tout $2 \leq p \leq n-1$, les sous-espaces $\text{Vect}(e_1, \ldots, e_p)$ et $\text{Vect}(e_{p+1}, \ldots, e_n)$ sont des supplémentaires de $E$.

Retour énoncé

**Fiche 5 :**
*Question de cours* :

**1.** Définition du rang d'une famille de vecteurs :
Soit $E$ un $\mathbb{K}-$espace vectoriel et $(u_1, \ldots, u_p)$ une famille finie de vecteurs de $E$.
*Si elle existe*, la dimension de $\text{Vect}(u_1, \ldots, u_p)$ est appellée **rang** de la famille $(u_i)_{i \in [\![1,p]\!]}$.

**2.** Donner la définition d'un hyperplan : dans un $\mathbb{K}-$espace vectoriel $E$, un hyperplan $H$ est un sous-espace vectoriel qui admet un supplémentaire de dimension 1.

**3.** Énoncer la formule de Grassmann :
Soit $E$ un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension finie. Soient $F_1$ et $F_2$ deux sous-espaces de $E$.
On a $\dim(F_1 + F_2) = \dim F_1 + \dim F_2 - \dim(F_1 \cap F_2)$.

**4.** Dans $E$ un $\mathbb{K}-$ev de dimension finie, donner les relations entre les dimensions de deux supplémentaires :
Si $F_1$ et $F_2$ sont supplémentaires dans $E$ alors $\dim E = \dim F_1 + \dim F_2$.
Que peut-on dire sur les dimensions si $E_1 \bigoplus \cdots \bigoplus E_p = E$ ?
Si $E_1 \bigoplus \cdots \bigoplus E_p = E$ alors $\dim E = \dim E_1 + \cdots + \dim E_p$.

Retour énoncé

**Fiche 6 :**

*Question de cours* :

**1.** Soient $E$, $F$ deux $\mathbb{K}-$espaces vectoriels.

**a.** Donner la définition d'une application linéaire $f$ de $E$ dans $F$.
**b.** Donner la définition de $\text{Im} f$ et de $\ker f$.
**c.** Démontrer que $\ker f$ est un sous-espace vectoriel de $E$.

**2.** Donner la définition et la notation de la matrice d'une application linéaire dans des bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ de $E$ et $F$ respectivement.
La matrice de $f \in \mathcal{L}(E, F)$ dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ est notée $Mat_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(f)$. Elle est remplie en mettant dans la colonne $j$ les coordonnées de $f(e_j)$ dans la base $\mathcal{C}$ (où $e_j$ est le jième vecteur de la base $\mathcal{B}$ de départ.)
Attention, pour un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$, on parle de la matrice de $f$ dans la base $\mathcal{B}$ : c'est parce que l'on prend alors la même base $\mathcal{B}$ au départ (de $E$) et à l'arrivée (dans $E$). On la note $Mat_{\mathcal{B}}(f)$.

**3.** Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de $E$. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Donner une description de $\mathrm{Im} f$ à l'aide de $\mathcal{B}$.
$\mathrm{Im} f = \mathrm{Vect}(f(e_1), \dots, f(e_n))$, ce qui signifie que la famille $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ est génératrice de $\mathrm{Im} f$. Elle en sera une base si vous montrez que cette famille est libre. Mais attention, c'est loin d'être toujours le cas !

*Exercice*
Montrer que l'application $\varphi : \begin{array}{ccc} C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) & \to & C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \\ f & \mapsto & f' + 2f \end{array}$ est un endomorphisme.
Déterminer le noyau de $\varphi$.
➢ $\varphi$ est un endomorphisme : montrez que
➞ $\forall f \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}),\ f' + 2f \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, puis que
➞ $\forall f,\ g \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \forall \lambda,\ \mu \in \mathbb{R},\ \varphi(\lambda f + \mu g) = \lambda \varphi(f) + \mu \varphi(g)$ (en utilisant la linéarité de la dérivation des fonctions).
➢ $f \in \ker \varphi \iff f' + 2f = 0$.
On résout donc une gentille équation différentielle linéaire d'ordre 1, et sans erreur de signe, on trouve $\ker \varphi = \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \alpha e^{-2x} \end{array},\ \alpha \in \mathbb{R} \right\}$. Ceci peut aussi se noter $\ker \varphi = \mathrm{Vect}(y_0)$ avec $y_0 : x \mapsto e^{-2x}$.

Retour énoncé

**Fiche 7 :**

*Question de cours* :

**1.** Définir le rang d'une application linéaire.
Le rang d'une application linéaire est la dimension de son image : $\mathrm{rg} f = \dim \mathrm{Im} f$.

**2.** Énoncer les résultats liant la surjectivité/l'injectivité de $f$ à $\mathrm{Im} f$ et $\ker f$.
Soit $f$ une application linéaire de $E$ dans $F$.
➞ $f$ est injective si et seulement si $\ker f = \{0\}$.
➞ $f$ est surjective si et seulement si $\mathrm{Im} f = F$.

**3.** Soient $E$ et $F$ deux $\mathbb{K}-$espaces vectoriels. On suppose que $f$ est un isomorphisme de $E$ dans $F$. Que signifie cette hypothèse ?
Cela signifie que $f$ est une application linéaire de $E$ dans $F$ et qu'elle est bijective. On suppose de plus que $E$ est de dimension finie, que dire alors de $F$ ?
Sous cette hypothèse, on sait que $F$ est également de dimension finie et que $\dim F = \dim E$. Montrer que $f^{-1}$ est un isomorphisme de $F$ dans $E$.
$f^{-1}$ est une application bijective de $F$ dans $E$. Il faut encore montrer que $f^{-1}$ est linéaire.
Soient $y,\ y' \in F$, et $\lambda,\ \mu \in \mathbb{K}$, on veut montrer que $f^{-1}(\lambda y + \mu y') = \lambda f^{-1}(y) + \mu f^{-1}(y')$.
Partons de $f^{-1}(\lambda y + \mu y')$, et remplaçons $y$ par $f(f^{-1}(y))$, en utilisant la reciprocité de $f$ et $f^{-1}$. De même pour $f^{-1}(y')$.
On a alors $f^{-1}(\lambda y + \mu y') = f^{-1}(\lambda f(f^{-1}(y)) + \mu f(f^{-1}(y'))) = f^{-1}\left(f(\lambda f^{-1}(y) + \mu f^{-1}(y'))\right)$ grâce à la linéarité de $f$.
On peut alors "simplifier " $f^{-1}(f(\dots))$, pour obtenir $f^{-1}(\lambda y + \mu y') = \lambda f^{-1}(y) + \mu f^{-1}(y')$.
*Je préfère souvent partir de $f(\lambda f^{-1}(y) + \mu f^{-1}(y'))$ pour obtenir par linéarité de $f$ : $\lambda y + \mu y'$ et conclure avec $f(X) = Y \iff X = f^{-1}(Y)$. Essayez, c'est moins lourd à écrire.*

*Exercice*
Soit $E$ un $\mathbb{R}-$espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On pose $F = \{x \in E\ /\ f(x) = \lambda x\}$.
Justifier que $F$ est un sous-espace vectoriel de $E$.
$F$ et non vide car $f(0_E) = 0_E$ donc $0_E \in F$.
Soient $x,\ y \in F$ et $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$, on veut montrer que $\alpha x + \beta y \in F$.
$f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$, et puisque $x$ et $y$ sont dans $F$, on a $f(\alpha x + \beta y) = \alpha \lambda x + \beta \lambda y = \lambda(\alpha x + \beta y)$.
On conclut que $\alpha x + \beta y \in F$, et donc que $F$ est stable par C.L.

Retour énoncé

**Fiche 8 :**

*Question de cours* :

**1.** Donner la définition d'un isomorphisme. Donner une caractérisation de " $f$ est un isomporphisme de $E$ dans $F$ " qui utilise les matrices.
Un isomorphisme est une application linéaire bijective *(entre deux $\mathbb{K}-$espaces vectoriels donc).*
Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. $f$ est un isomorphisme si et seulement si sa matrice dans des bases respectives de $E$ et $F$ est inversible.

**2.** Quel est le lien entre produit de matrices et applications linéaires ?
*Commencez par déifnir les espace s et noter des bases de chacun...*
Si $f \in L(E, F)$ de matrice $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(f)$ et $g \in L(F, G)$ de matrice $B = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{D}}(g)$,
alors $BA$ est la matrice de $g \circ f$ dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{D}$ :
$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{D}}(g \circ f) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{D}}(g) \times \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(f)$

**3.** Donner l'ensemble des caractérisation d'une matrice inversible.
Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. On note $(C_1, \dots, C_n)$ ses vecteurs colonnes (vus comme des éléments de $\mathbb{K}^n$).

- Soit $E$ un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension $n$ muni d'une base $\mathcal{B}$.
  Pour $f \in L(E)$ tel que $Mat_{\mathcal{B}}(f) = A$, $A$ est inversible si et seulement si $f$ est bijective.
- $A$ est inversible si et seulement si $\forall X \in M_{n,1}(\mathbb{K}) \quad (AX = 0 \implies X = 0)$.
- $$\begin{aligned} A \text{ inversible} &\iff (C_1, \dots, C_n) \text{ est une base de } \mathbb{K}^n . \\ &\iff (C_1, \dots, C_n) \text{ est une famille libre de } \mathbb{K}^n \\ &\iff (C_1, \dots, C_n) \text{ est une famille génératrice de } \mathbb{K}^n \end{aligned}$$
- $A$ est inversible si et seulement si $\mathrm{rg}(A) = n$.
- $A$ est inversible si et seulement si, pour tout $Y \in M_{n,1}(\mathbb{K})$, le système $Y = AX$ (d'inconnue $X \in M_{n,1}(\mathbb{K})$) admet une unique solution.
- $A$ est inversible si et seulement si elle est équivalente par ligne à la matrice identité.

**4.** Vrai ou Faux ? *Soient $E$ et $F$ des $\mathbb{K}-$espaces vectoriels. Soit $(e_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ une famille de vecteurs de $E$ et $(v_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ une famille de vecteurs de $F$. Il existe une unique application linéaire $f$ de $E$ dans $F$ telle que $\forall i \in I,\ f(e_i) = v_i$.*
FAUX, piège classique...il manque l'hypothèse $(e_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ **base de** $E$.
Mais une fois cette hypothèse bien notée, c'est VRAI !

**5.** Compléter :
Soient $E$, $F$ deux $\mathbb{K}-$espaces vectoriels et soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. On suppose que $E$ est et on note $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de $E$.
$f$ est surjective si et seulement si $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ est une famille génératrice de $F$.
$f$ est injective si et seulement si $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ est une famille libre de $F$.
$f$ est bijective si et seulement si $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ est une base de $F$.

*Exercice*

Soient $u$ et $v$ deux endomorphismes d'un espace vectoriel $E$. Montrer que

$$u \circ v = 0 \iff \mathrm{Im} v \subset \ker u$$

On travaille par double implication.
➢ On suppose $u \circ v = 0$. On veut montrer que $\mathrm{Im} v \subset \ker u$.
Soit $y \in \mathrm{Im} v$ : il existe $x \in E$ tel que $y = v(x)$. On a donc $u(y) = u \circ v(x) = 0$ car $u \circ v = 0$.
On en déduit que $y \in \ker u$. Donc $\mathrm{Im} v \subset \ker u$.
➢ On suppose maintenant que $\mathrm{Im} v \subset \ker u$. On veut montrer que $u \circ v = 0$, c'est-à-dire que $\forall x \in E,\ u \circ v(x) = 0$.
Soit $x \in E$, $v(x) \in \mathrm{Im} v$, donc $v(x) \in \ker u$ par l'hypothèse. Ainsi $u(v(x)) = 0$.
On a bien montré que $\forall x \in E,\ u \circ v(x) = 0$.

Retour énoncé

**Fiche 9 :**

*Question de cours :*

1. On suppose $E$ de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$, démontrer que $f$ est bijective si et seulement si $f$ est injective.
   *On dira que c'est une caractérisation des automorphismes en dimension finie, qu'est-ce qu'un automorphisme au fait ?* L'hypothèse " $E$ est de dimension finie " est fondamentale !
   ➙ On a $f$ bijective $\Longrightarrow f$ injective.
   ➙ Supposons $f$ injective. Considérons une base de $E$, $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$. On sait alors que la famille $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ est une famille libre de $E$.
   Or $\dim E = n$, et cette famille a $n$ vecteurs donc cette famille est une base de $E$. Or $\mathrm{Im} f = \mathrm{Vect}(f(e_1), \dots, f(e_n))$, donc $\mathrm{Im} f = E$.
   On en conclut que $f$ est surjective et donc bijective !
2. Soit $p$ un projecteur de $E$. Qu'est-ce qu'un projecteur ?
   Que pouvez-vous dire de $\mathrm{Im} p$ et $\ker p$ ?
   Un projecteur $p$ est un endomorphisme de $E$ tel que $p \circ p = p$.
   Pour un projecteur $p$ de $E$, on montre que $\mathrm{Im} p$ et $\ker p$ sont des supplémentaires de $E$. *Vous devez savoir prouver ce résultat !*
3. Énoncer le théorème du rang.
   Soient $E$ et $F$ deux $\mathbb{K}-$espaces vectoriels. On suppose $\underline{E \text{ de dimension finie}}$.
   Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$, on a $\dim E = \dim \ker f + \mathrm{rg} f$.

*Exercice*

Soit $\varphi : \begin{array}{ccc} C^0([0,1], \mathbb{R}) & \to & \mathbb{R} \\ f & \mapsto & \displaystyle\int_0^1 f(t)\, dt \end{array}$. Montrer que $f$ est une forme linéaire.

On doit montrer que

➢ $\forall f,\ g \in C^0([0,1], \mathbb{R}),\ \forall \lambda,\ \mu \in \mathbb{R},\ \varphi(\lambda f + \mu g) = \lambda \varphi(f) + \mu \varphi(g)$, (c'est la linéarité de l'intégrale qui permet de conclure)

➢ on ajoutera que $\varphi$ arrive bien dans $\mathbb{R}$ pour dire que c'est une **forme** linéaire.

Retour énoncé

**Fiche 10 :**

*Question de cours :*

1. Définir une projection vectorielle et une symétrie vectorielle.
   Pour définir de telles applications, on commence par se donner deux supplémentaires $F$ et $G$ de $E$.
   Pour tout $x \in E$, il existe un unique couple $(u, v) \in F \times G$ tel que $x = u + v$.
   ➙ L'application $p : \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ x & \mapsto & u \end{array}$ est appelée **projection vectorielle sur $F$ parallèlement à $G$** ➙
   L'application $s : \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ x & \mapsto & u - v \end{array}$ est appelée **symétrie vectorielle par rapport à $F$ parallèlement à $G$**
2. Soit $p$ un projecteur d'un $\mathbb{K}-$espace vectoriel $E$. Montrez que $\mathrm{Im} p = \{x \in E \ / \ p(x) = x\}$.
   Cela revient à montrer que $\mathrm{Im} p = \ker(f - \mathrm{Id}_E)$.
   ➙ Soit $x \in \mathrm{Im} p$ : il existe $u \in E$ tel que $x = p(u)$ *(définition de Imp)* donc $p(x) = p \circ p(u) = p(u)$ *(définition de projecteur $p \circ p = p$)*. Donc $p(x) = x$.
   On a montré $\forall x \in \mathrm{Im} p$, $p(x) = x$. Donc $\mathrm{Im} p \subset \{x \in E \ / \ p(x) = x\}$.
   ➙ Soit $x \in E$ tel que $p(x) = x$, on a par définition de $\mathrm{Im} p$ $x = p(x) \in \mathrm{Im} p$.
   On a montré pour tout $x$ tel que $p(x) = x$, $x \in \mathrm{Im} p$. Donc $\{x \in E \ / \ p(x) = x\} \subset \mathrm{Im} p$.
   ➙ On conclut par double inclusion que les deux ensembles sont égaux.

**3.** Définir la somme directe de plusieurs sous-espaces vectoriels $F_1, \dots, F_p$ d'un $\mathbb{K}-$ev $E$.
Soient $F_1, \dots, F_p$ des sous-espaces vectoriels de $E$.
On dit que les $F_i$ sont **en somme directe** si tout vecteur de $F_1 + \dots + F_p$ s'écrit de manière unique comme une somme d'un vecteur de $F_1$, ..., d'un vecteur de $F_p$.

**4.** Définir la notion de projecteurs associés à la décomposition de $E$ en somme directe $E = \bigoplus_{i=1}^p F_p$.
Soit $x \in E$, on peut l'écrire de manière unique comme somme de vecteurs des $F_i$ :
$x = x_1 + \dots + x_m$, avec $\forall i \in [\![1, m]\!],\ x_i \in F_i$.
Pour tout $i \in [\![1, m]\!]$, on pose $p_i\ :\ \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ x & \mapsto & x_i \end{array}$. *$p_i$ est la projection sur $F_i$ parallèlement à $\bigoplus_{j \neq i} F_j$.*

On dit que les $p_i$ sont les projecteurs **associés à la décomposition de $E$ en somme directe** $E = \displaystyle\bigoplus_{i=1}^{m} F_i$.

*Exercice*
Soit $p,\ q$ deux projecteurs de $E$. Montrer que $p \circ q = p$ si et seulement si $\ker q \subset \ker p$.
Donner un exemple de tels projecteurs.
➢ On suppose que $p \circ q = p$. On veut montrer que $\ker q \subset \ker p$.
Soit $x \in \ker q$, on a $q(x) = 0$, donc $p(q(x)) = 0$. Or $p \circ q = p$, donc $p(x) = 0$. On a bien montré que $x \in \ker p$.
On a donc $\ker q \subset \ker p$.
➢ On suppose que $\ker q \subset \ker p$. On veut montrer que $p \circ q = p$, i.e. $\forall x \in E,\ p \circ q(x) = p(x)$.
Soit $x \in E$, on écrit $x = q(x) + x - q(x)$ : c'est la décomposition de $x$ suivant $\mathrm{Im} q \oplus \ker q = E$.
On a ainsi $x - q(x) \in \ker q$ donc $x - q(x) \in \ker p$.
Ainsi, en appliquant $p$ : $p(x) = p(q(x) + x - q(x)) = p(q(x)) + p(x - q(x)) = p \circ q(x)$.
On a donc montré que $\forall x \in E,\ p(x) = p \circ q(x)$. Donc $p = p \circ q$.
➢ Exemple : on se place dans $\mathbb{R}^3$, et on note $(e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
On pose $F = \mathrm{Vect}(e_1, e_2)$, $G = \mathrm{Vect}(e_3)$, et $q$ la projection sur $F$ parallèlement à $G$.
On pose $F' = \mathrm{Vect}(e_1)$, $G' = \mathrm{Vect}(e_2, e_3)$, et $p$ la projection sur $F'$ parallèlement à $G'$.
On a $\ker q = G \subset \ker p = G'$, donc $p = p \circ q$.

Retour énoncé