Pour $m \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{R}^m$ est un espace vectoriel euclidien, muni du produit scalaire canonique, et de la norme euclidienne associée.
Nous allons étudier des fonctions f définies sur une partie de $\mathbb{R}^p$ à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, avec $p \leqslant 3$ et $n \leqslant 3$. Un grand nombre des notions abordées le seront pour les fonctions de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}$ et pourront être généralisées.

Rappel : on dit que $U \subset \mathbb{R}^p$ est un ouvert de $\mathbb{R}^p$ si pour tout $a \in U$, il existe $r > 0$ tel que $B(a,r)$, la boule ouverte de centre a et de rayon r, est incluse dans U. Soit $x \in \mathbb{R}^p$, soit A une partie de $\mathbb{R}^p$, on dit que

- x est un point intérieur à A s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(x,\varepsilon) \subset A$. On note $\mathring{A}$ l'ensemble des points intérieurs à A.
- x est un point adhérent à A si pour tout $\varepsilon > 0$, $B(x,\varepsilon) \cap A \neq \emptyset$. On note $\overline{A}$ l'ensemble des points adhérents à A.

I. LIMITE ET CONTINUITE

Nous commençons par considérer une fonction $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$, avec p, égal à 2 ou 3.

1. Applications partielles

Définition 1 : Soit f une application de U, un ouvert de $\mathbb{R}^p$, dans $\mathbb{R}$. Soit $a = (a_1, a_2, \dots, a_p) \in U$.
On note $A_i = \{x \in \mathbb{R} \ / \ (a_1, \dots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \dots, a_p) \in U\}$ pour $i \in [\![1,p]\!]$. On appelle **applications partielles associées au point** a les applications

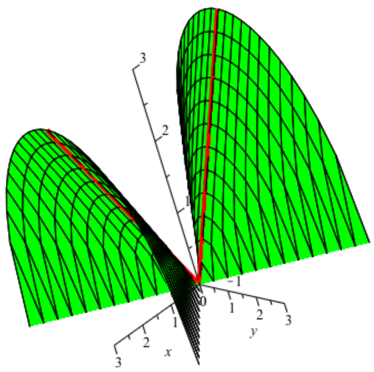
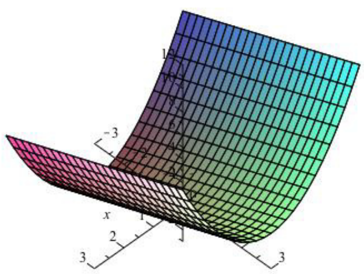
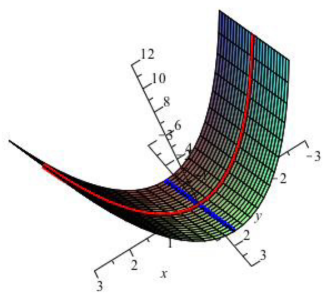
$$\begin{array}{rcl} A_i & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(a_1, \dots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \dots, a_p) \end{array}.$$

Elles sont souvent notées $f(a_1, \dots, a_{i-1}, \cdot, a_{i+1}, \dots, a_p)$, nous les noterons p_i mais pensez que p_i dépend de $(a_1, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_p)$.

Dans le cas $p = 2$, considérons $f : U \to \mathbb{R}$ avec U ouvert de $\mathbb{R}^2$. Soit $a = (\alpha, \beta) \in U$. Il existe $\varepsilon > 0$ est tel que $B(a,\varepsilon) \subset U$.
On note $p_1 : x \mapsto f(x,\beta)$, elle est définie de $]\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon[$ dans $\mathbb{R}$.
On note $p_2 : y \mapsto f(\alpha, y)$, elle est définie de $]\beta - \varepsilon, \beta + \varepsilon[$ dans $\mathbb{R}$.

Exemple 1 : Donner les applications partielles des fonctions suivantes : 1) $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & x^2 + y \end{array}$ en $a = (\alpha, \beta)$.

2) $f : \begin{array}{rcl} A & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & \sqrt{x^2 - y^2} \end{array}$ où $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x^2 - y^2 > 0\}$ en $a = (2,1)$ et en $a = (1,0)$.

Remarque 1 : si A est un ouvert, les applications partielles seront toujours définies au voisinage des a_i. Justifiez-le.

2. Limite en un point $a \in \mathbb{R}^p$

Soit f une application de U dans $\mathbb{R}$, où U est une partie de $\mathbb{R}^p$.

Définition 2 : ✰ Soit $a \in \overline{U}$ et $l \in \mathbb{R}$. On dit que f **admet** l **pour limite en** a si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall u \in U \quad \|u - a\| < \eta \Longrightarrow |f(u) - l| < \varepsilon$$

On peut aussi pour une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}$ définir une limite $+\infty$ ou $-\infty$:

f **admet** $+\infty$ **pour limite en** a si $\forall M > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall u \in U \quad \|u - a\| < \eta \Longrightarrow f(u) > M$.

f **admet** $-\infty$ **pour limite en** a si $\forall M < 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall u \in U \quad \|u - a\| < \eta \Longrightarrow f(u) < M$.

Proposition 1

Si f admet une limite en a alors celle-ci est unique. On la note $\lim\limits_{u \to a} f(u) = l$.

On montre les mêmes théorèmes généraux que dans le cas des fonctions de variable réelle : somme, produit, inverse de limites ; passage à la limite dans une inégalité (sous réserve d'existence) ; théorèmes d'encadrement ; etc

Remarque 2 : on peut aussi définir la notion de limite en a pour f définie sur $U \setminus \{a\}$ en utilisant

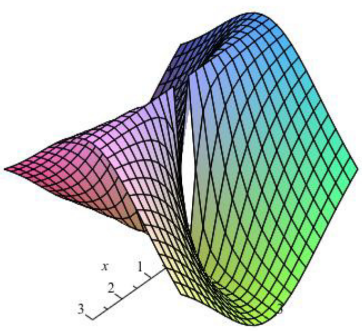
$$\dots\ \forall u \in U \setminus \{a\} \quad \|u - a\| < \eta \Longrightarrow \dots.$$

Proposition 2

Si f admet une limite l en $a = (a_1, \dots, a_p)$ alors ses applications partielles p_i, asociées à a, admettent pour limite l en a_i pour tout $i \in [\![1, p]\!]$.

Pour démontrer ceci on utilise le fait que pour tout $u = (x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{R}^p$, $|x_i - a_i| \leqslant \|x - a\|$ et le fait que f a une limite en a. **Attention**, la réciproque est fausse : les applications partielles peuvent admetttre des limites sans que f n'en admette.

Exercice 1 $f\ :\ (x, y) \mapsto \dfrac{x^2}{x^2 + y^2}$ est définie sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Montrer qu'elle n'a pas de limite en $(0,0)$.



Proposition 3

Soit $f\ :\ U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ et $a \in \overline{U}$. Si f admet une limite l en $a = (\alpha, \beta)$, et si $\varphi\ :\ t \mapsto (x(t), y(t))$ admet a pour limite quand t tend vers 0, alors $g\ :\ t \mapsto f(x(t), y(t))$ tend vers l quand t tend vers 0.

démo

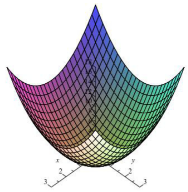
Proposition 4

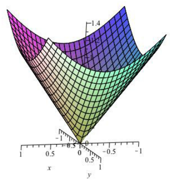
Soit $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ et $a \in \overline{U}$. Soit $l \in \mathbb{R}$. Si il existe une fonction $h : I \to \mathbb{R}$, où I est un intervalle contenant 0, telle que $\lim\limits_{t \to 0} h(t) = 0$ et $\forall u \in U$, $|f(u) - l| \leqslant h(\|u - a\|)$, alors $\lim\limits_{u \to a} f(u) = l$.

démo

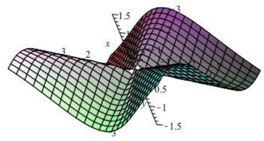
Exemple 2

a. $f : (x, y) \mapsto x^2 + y^2$ et $f : (x, y) \mapsto \sqrt{x^2 + y^2}$ admettent une limite en tout point (α, β) de $\mathbb{R}^2$.





b. $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & \dfrac{x^2 y}{x^2 + y^2} \end{array}$. f admet 0 pour limite en $(0, 0)$.



En pratique, pour étudier la limite de $f : u = (x, y) \mapsto f(u) = f(x, y)$ en $a = (\alpha, \beta)$:

➢ on cherche le candidat limite l en considérant les applications partielles de f en a.

- ➙ si ces deux applications n'ont pas la même limite : f n'a pas de limite.
- ➙ si ces deux applications ont la même limite l, nous avons un candidat.

On essaie alors de majorer $|f(u) - l|$ (premier ➢) et si on n'y arrive pas, on cherche un "chemin" $u(t)$ tel que $u(0) = a$ pour lequel $f(u(t))$ ne tend pas vers l quand t tend vers 0 (deuxième ➢).

➢ Pour montrer que f admet pour limite l en a, on peut chercher à majorer $|f(u) - l|$ par $h(\|u - a\|)$ où h est une fonction aussi simple que possible qui tend vers 0 en 0.

On se ramène souvent à une étude en $a = (0, 0)$ en considérant $u - a = (x - \alpha, y - \beta)$.

Penser que $\|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2}$ et on peut majorer $|x|$ par $\|(x, y)\|$, $|y|$ par $\|(x, y)\|$.

➢ Pour montrer que f n'a pas de limite en a, on peut chercher des couples $(x(t), y(t))$, t variant dans un voisinage de 0, telle que $\lim\limits_{t \to 0}(x(t), y(t)) = (\alpha, \beta)$ et tels que $\lim\limits_{t \to 0} f(x(t), y(t)) \neq l$.

Exercice 2

a. $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & \begin{cases} \dfrac{x^2 + xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{array}$. Déterminer si f admet une limite en 0.

b. $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{array}$. Déterminer si f admet une limite en 0.

3. Continuité

Définition 3 : Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^p$ et $a \in U$. Soit $f : U \to \mathbb{R}$.

On dit que f est **continue en** a si f admet pour limite $f(a)$ en a, i.e.

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall u \in A \quad \|u - a\| < \eta \Longrightarrow |f(u) - f(a)| < \varepsilon$$

On dit que f est **continue sur** U si f est continue en tout point de U.

Exemple 3

$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & x \end{array}$ et $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & y \end{array}$ sont continues sur $\mathbb{R}^2$.

Proposition 5

Si f est continue en a, alors elle est bornée sur un voisinage de a, i.e.

$$\exists \eta > 0,\ \exists M \in \mathbb{R}_+,\ \forall u \in U \quad \|u-a\| \leqslant \eta \Longrightarrow |f(u)| \leqslant M$$

Proposition 6

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^p$ et $a = (a_1, \ldots, a_p) \in U$.
Si f est continue en a, **alors** ses applications partielles $f(a_1, \ldots, a_{i-1}, \cdot, a_{i+1}, \ldots, a_p)$ sont continues en a_i respectivement.

démo

Notation : on note $C(U, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues de U dans $\mathbb{R}$.

Opérations sur les fonctions continues

Proposition 7

Soit U une partie ouverte de $\mathbb{R}^p$. Soient f et g des applications de U dans $\mathbb{R}$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

a. Si f est continue sur U, alors $|f|$ et λf sont continues sur U.

b. Si f, g sont continues sur U, alors $f+g$, fg sont continues sur U.

c. Si f, g sont continues sur U et si g ne s'annule pas sur U, alors $\dfrac{f}{g}$ est continue sur U.

Exemple 4

➢ $(x,y) \mapsto x^3 y^2$ est continue sur $\mathbb{R}^2$ (c'est le produit de $(x,y) \mapsto x$ et $(x,y) \mapsto y$).

➢ Les fonctions (polynomiales en x, y) du type $f : (x,y) \mapsto \displaystyle\sum_{0 \leqslant p,q \leqslant n} a_{pq} x^p y^q$ sont continues sur $\mathbb{R}^2$.

➢ $(x,y) \mapsto \dfrac{x}{y^2 + x^2 + 1}$ est continue sur $\mathbb{R}^2$.

Composée

Proposition 8

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^p$, soit $a \in U$. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$.
Soit $f : U \to \mathbb{R}$, continue en a telle que $f(U) \subset I$. Soit $\varphi : I \to \mathbb{R}$ continue en $f(a)$.
La fonction $\varphi \circ f : U \to \mathbb{R}$ est continue en a.

démo

4. Généralisation à une application de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^n$

Soit $f : U \to \mathbb{R}^n$ une fonction définie sur une partie U de $\mathbb{R}^p$. p et n désignent des entiers naturels compris entre 1 et 3.

Définition 4 : *Applications composantes*
On note $f : x \mapsto (f_1(x), \dots, f_n(x))$ et on appelle $f_i : U \to \mathbb{R}$ ses **applications composantes** (ou applications coordonnées) pour i dans $[\![1, n]\!]$.

Définition 5 : Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^p$, soit $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$. Soit $a \in \overline{U}$ et $l \in \mathbb{R}^n$.
On dit que f **admet** l **pour limite en** a si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall u \in U \quad \|u - a\| \leqslant \eta \Longrightarrow \|f(u) - l\| \leqslant \varepsilon$$

Proposition 9

f admet une limite en $a = (a_1, \dots, a_p)$ si et seulement si chacune de ses **applications composantes** admet une limite finie en a.

démo

On est donc ramené à l'étude précédente car les applications composantes (à ne pas confondre avec les applications partielles) sont des fonctions de U dans $\mathbb{R}$.

De même, on définit les fonctions continues de U dans $\mathbb{R}^n$, et on note $C(U, \mathbb{R}^n)$ l'ensemble des fonctions continues de U dans $\mathbb{R}^n$.

Proposition 10

f est continue en a si et seulement si les applications composantes de f sont continues en a.

II. DERIVATION

1. Dérivées partielles d'ordre 1

Nous donnons les définitions pour une fonction $f : U \to \mathbb{R}$, où U est une partie de $\mathbb{R}^p$, avec toujours $p \leqslant 3$.

Définition 6 : ✰ *Dérivées partielles premières.*
Soit $a = (a_1, \dots, a_p) \in \mathring{U}$.
On dit que f admet en a une dérivée partielle (première) par rapport à x_i (ou par rapport à sa i-ème variable) si l'application partielle $p_i = f(a_1, \dots, a_{i-1}, \cdot, a_{i+1}, \dots, a_p)$ est dérivable en a_i.
On note alors $\partial_i f(a)$ ou $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ le nombre $p_i'(a_i)$.

Par exemple, pour une fonction $f : (x, y) \mapsto f(x, y)$, en $a = (\alpha, \beta)$, sous réserve d'existence des limites,

$$p_1 : x \mapsto f(x, \beta)$$
$$\frac{\partial f}{\partial x}(a) = p_1'(\alpha), = \lim_{x \to \alpha} \frac{f(x, \beta) - f(\alpha, \beta)}{x - \alpha} = \lim_{t \to 0} \frac{f(\alpha + t, \beta) - f(\alpha, \beta)}{t}$$

$$p_2 : y \mapsto f(\alpha, y),$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(a) = p_2'(\beta), = \lim_{y \to \beta} \frac{f(\alpha, y) - f(\alpha, \beta)}{y - \beta} = \lim_{t \to 0} \frac{f(\alpha, \beta + t) - f(\alpha, \beta)}{t}$$

En pratique

➢ si l'on a une expression simple pour $f(x,y)$, on calcule $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ en dérivant l'expression "à y fixé" : la variable est x, et y est vu comme un paramètre.

➢ si la fonction est définie par la donnée d'une valeur en un point et par une expression ailleurs, on revient à la définition pour déterminer les dérivées partielles en ce point : on exprime l'application partielle et on cherche si cette fonction de la variable réelle est dérivable en α, ou en β suivant les cas.

Exemple 5 $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & \sqrt{x^2+y^2} \end{array}$.

• f admet des dérivées partielles premières en tout (x,y) de $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ et
$\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

• f n'admet pas de dérivée partielle première en $(0,0)$. Pour le vérifier, il faut revenir à la définition.

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $p_1(0,t) = |t|$ et p_1 n'est donc pas dérivable en 0, donc $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ n'est pas définie en $(0,0)$.

De même, on montre que $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ n'est pas définie en $(0,0)$.

Exercice 3

a. Soit $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & \ln(\frac{y}{x}) \end{array}$.

g admet-elle des dérivées partielles premières en $(x,y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$? Si oui, les calculer.

b. Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & \begin{cases} \dfrac{x^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases} \end{array}$

Calculer ses dérivées partielles premières, après avoir justifié qu'elles existent.

Définition 7 : Soit $f : U \to \mathbb{R}$, où U est un ouvert de $\mathbb{R}^p$.

On suppose que f admet des dérivées partielles en tout point a de U.

On appelle fonctions dérivées partielles de f les applications $\dfrac{\partial f}{\partial x_i} : \begin{array}{ccc} U & \to & \mathbb{R} \\ a & \mapsto & \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a) \end{array}$.

Propriétés

Les dérivées partielles premières sont définies via la dérivation de fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{R}^n$).

On peut utiliser les propriétés connues sur ces fonctions pour prouver que, si f et g admettent des dérivées partielles premières en a, alors

- $\lambda f + \mu g$ en admet également en a et $\dfrac{\partial}{\partial x_i}(\lambda f + \mu g)(a) = \lambda \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a) + \mu \dfrac{\partial g}{\partial x_i}(a)$,
- fg en admet également en a et $\dfrac{\partial}{\partial x_i}(fg)(a) = f(a)\dfrac{\partial g}{\partial x_i}(a) + \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a)g(a)$,
- si f ne s'annule pas en a, alors $\dfrac{1}{f}$ admet des dérivées partielles premières en a et
$\dfrac{\partial}{\partial x_i}(\dfrac{1}{f})(a) = -\dfrac{1}{f(a)^2}\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a)$.

Définition 8 : Soit $f : U \to \mathbb{R}$ admettant des dérivées partielles premières en $a \in \mathring{U}$.

Le **gradient de** f **en** a est le vecteur de $\mathbb{R}^p$, noté $\overrightarrow{grad}\,(f)(a)$ ou $\nabla f(a)$, égal à $(\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(a), \ldots, \dfrac{\partial f}{\partial x_p}(a))$.

Définition 9 : Soit $f : U \to \mathbb{R}$ admettant des dérivées partielles premières sur U, ouvert.
On appelle **point critique de** f, les points $a \in \mathring{U}$ tels que $\nabla f(a) = (0,0)$, i.e. $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(a) = \cdots = \dfrac{\partial f}{\partial x_p}(a) = 0$.

2. Fonctions de classe C^1

Définition 10 : ✰ Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^p$ et $f : U \to \mathbb{R}$.
On dit que f est **de classe** C^1 **sur** U si ses dérivées partielles premières existent en tout point de U et sont continues sur U.
On note $C^1(U,\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de classe C^1 sur U à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Proposition 11

- $C^1(U,\mathbb{R})$ est un $\mathbb{R}-$ev, stable par produit .
- Si f et g sont dans $C^1(U,\mathbb{R})$ et si g ne s'annule pas, alors $\dfrac{f}{g}$ est de classe C^1 sur U.

Exemple 6 :

a. $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & x \end{array}$ et $g : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & y \end{array}$ sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

b. Toute fonction polynômiale en x et y est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ car ses dérivées partielles existent et sont encore des fonctions polynomiales, donc elles sont continues.

c. Soit $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & \begin{cases} \dfrac{x^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases} \end{array}$. f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
Il faut étudier la continuité en $(0,0)$, puis l'existence des dérivées partielles premières en ce point, puis la continuité de $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ en $(0,0)$ pour savoir si f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

Proposition 12 *Existence d'un développement limité à l'ordre* 1 *en a* (admis)

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^p$ et $f : U \to \mathbb{R}$ de classe C^1 sur U.
Soit $a = (a_1, \ldots, a_p) \in U$. Il existe une fonction ε définie sur U et telle que $\lim\limits_{u \to a} \varepsilon(u) = 0$ et
$\forall u = (u_1, \ldots, u_p) \in U, \quad f(u) = f(a) + \displaystyle\sum_{i=1}^{p} (u_i - a_i) \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) + \|u - a\| \varepsilon(u).$
On dit que f possède un développement limité à l'ordre 1 en a.

Proposition 13

Si f est de classe C^1 sur U alors f est continue sur U.

Un peu de composée

Proposition 14 *fonction de* $\mathbb{R}^p$ *dans* $\mathbb{R}$ *suivie d'une fonction de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$

Soit f de classe C^1 sur U ouvert de $\mathbb{R}^p$ et $\varphi : I \to \mathbb{R}$ avec $f(U) \subset I \subset \mathbb{R}$, de classe C^1 sur I.
Alors $\varphi \circ f$ est de classe C^1 sur U et

$$\forall a \in U, \ \frac{\partial}{\partial x_i}(\varphi \circ f)(a) = \varphi' \circ f(a) \ \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$$

Proposition 15 *fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^p$ suivie d'une fonction de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}$*

Soit $\varphi : I \to \mathbb{R}^p$ de classe C^1 sur I, intervalle de $\mathbb{R}$. Soit f de classe C^1 sur U ouvert de $\mathbb{R}^p$ tel que $\varphi(I) \subset U$.
On note $\varphi : t \mapsto (x_1(t), \dots, x_p(t))$ et $g = f \circ \varphi : t \mapsto f(x_1(t), \dots, x_p(t))$.
Alors g est dérivable sur I et
$\forall t \in I,\ g'(t) = \sum_{i=1}^{p} x_i'(t) \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x_1(t), \dots, x_p(t))$.

dem : Soit $t_0 \in I$, on veut montrer que g est dérivable en t_0. Posons $a = \varphi(t_0)$, f est de classe C^1, on écrit la formule de Taylor-Young à l'ordre 1 en $a = (x_1(t_0), \dots, x_p(t_0))$:
$\forall u = (u_1, \dots, u_p) \in U, \quad f(u) = f(a) + \sum_{i=1}^{p} (u_i - a_i) \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a) + \|u - a\| \varepsilon(u)$.
Pour tout $t \in I$, on a $\varphi(t) \in U$, on applique donc la formule pour $u = \varphi(t)$:
$g(t) = f(a) + \sum_{i=1}^{p} (x_i(t) - a_i) \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a) + \|\varphi(t) - \varphi(t_0)\| \varepsilon(\varphi(t))$.
On remarque que $g(t_0) = f(\varphi(t_0)) = f(a)$.
On considère le taux d'accroissement $\dfrac{g(t) - g(t_0)}{t - t_0}$, pour $t \neq t_0$: $\dfrac{g(t) - g(t_0)}{t - t_0} = \sum_{i=1}^{p} \dfrac{x_i(t) - a_i}{t - t_0} \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a) + \|\dfrac{\varphi(t) - \varphi(t_0)}{t - t_0}\| \varepsilon(\varphi(t))\|$.
On conclut que, quand t tend vers t_0, le terme de gauche tend vers $\sum_{i=1}^{p} x_i'(t_0) \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a)$.
Donc g est dérivable en t_0 et $g'(t_0) = \sum_{i=1}^{p} x_i'(t_0) \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a)$.

Proposition 16 *fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ suivie d'une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$*

Soient U, V deux ouverts de $\mathbb{R}^2$.
Soit $\varphi : (u, v) \mapsto (x(u, v), y(u, v))$ de U dans V, de classe C^1 sur U. Soit f de classe C^1 sur V.
L'application $g = f \circ \varphi$ est de classe C^1 sur U et $\forall (u, v) \in U$,

$$\frac{\partial}{\partial u} g(u, v) = \frac{\partial x}{\partial u}(u, v) \frac{\partial f}{\partial x}(x(u, v), y(u, v)) + \frac{\partial y}{\partial u}(u, v) \frac{\partial f}{\partial y}(x(u, v), y(u, v)) ,$$

$$\frac{\partial}{\partial v} g(u, v) = \frac{\partial x}{\partial v}(u, v) \frac{\partial f}{\partial x}(x(u, v), y(u, v)) + \frac{\partial y}{\partial v}(u, v) \frac{\partial f}{\partial y}(x(u, v), y(u, v)) .$$

3. Différentielle

Soit $f : U \to \mathbb{R}$, où U est un ouvert de $\mathbb{R}^p$. On suppose que f est de classe C^1 sur U.
La **différentielle de** f **en** $a \in U$ est l'application $df_a : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^p & \to & \mathbb{R}^n \\ (h_1, \dots, h_p) & \mapsto & \sum_{i=1}^{p} h_i \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a) \end{array}$.
C'est une application linéaire de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}$.

La **différentielle de** f est $df : \begin{array}{ccc} U & \to & \mathscr{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^n) \\ a & \mapsto & df_a \end{array}$.

On note $df(a) = df_a = \sum_{i=1}^{p} \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a) dx_i$ et $\boxed{df = \sum_{i=1}^{p} \dfrac{\partial f}{\partial x_i} dx_i}$

Cas particuliers

- Fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$: soit f de classe C^1 sur U, ouvert de $\mathbb{R}$. Soit $a \in U$.
  $df_a : h \mapsto hf'(a)$.

- Fonctions de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$: pour $f : (x,y) \mapsto f(x,y)$, on écrit $df_a : (h_1,h_2) \mapsto h_1 \dfrac{\partial f}{\partial x}(a) + h_2 \dfrac{\partial f}{\partial y}(a)$.
  On a $df_a(h) = \nabla f(a) \cdot h$.

  Résumé des notations pour $p = 2$
  On note $dx : (x,y) \mapsto x$ et $dy : (x,y) \mapsto y$.

  Soit f admettant des dérivées partielles premières en a.
  On note $df_a : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (h_1,h_2) & \mapsto & h_1 \dfrac{\partial f}{\partial x}(a) + h_2 \dfrac{\partial f}{\partial y}(a) \end{array}$ ou encore $\boxed{df_a = \dfrac{\partial f}{\partial x}(a)\, dx + \dfrac{\partial f}{\partial y}(a)\, dy}$.
  df_a est une forme linéaire sur $\mathbb{R}^2$, elle s'appelle **différentielle de** f **en** a.
  La différentielle de f est aussi notée $df = \dfrac{\partial f}{\partial x}\, dx + \dfrac{\partial f}{\partial y}\, dy$: c'est une application de U dans $\mathscr{L}(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$.

  Si f est de classe C^1 sur U, on a pour tout $u \in U$,
  $$f(u) = f(a) + df_a(u-a) + \|u-a\|\varepsilon(u)\ .$$

  Ceci s'écrit encore, pour $h = (h_1,h_2) \in \mathbb{R}^2$: $f(a+h) = f(a) + df_a(h) + \|h\|\varepsilon(h)$,
  $$f(a+h) = f(a) + \nabla f(a)\cdot h + \|h\|\varepsilon(h).$$
  Car on a pour tout $h = (h_1,h_2) \in \mathbb{R}^2$, $\nabla f(a)\cdot h = h_1 \dfrac{\partial f}{\partial x_1}(a) + h_2 \dfrac{\partial f}{\partial x_2}(a) = df_a(h)$.

4. Dérivées partielles d'ordre 2

Définition 11 : Soit $U \subset \mathbb{R}^p$ et $f : U \to \mathbb{R}^n$. Soit $a \in \mathring{U}$.
On dit que les dérivées partielles secondes de f en $a \in U$ existent si
• pour tout $i \in [\![1,p]\!]$, $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ existe sur un voisinage de a,
• pour tout $j \in [\![1,p]\!]$ et pour tout $i \in [\![1,p]\!]$, $\dfrac{\partial}{\partial x_j}(\dfrac{\partial f}{\partial x_i})(a)$ existent. On note alors $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a)$ cette dérivée partielle seconde de f en a par rapport aux variables x_i et x_j successivement (ou $\partial_j\partial_i f(a)$).

Définition 12 : Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^p$ et $f : U \to \mathbb{R}^n$.
On dit que f est **de classe** C^2 **sur** U si f admet des dérivées partielles secondes $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a)$, pour tout $a \in U$, pour tout $(i,j) \in [\![1,p]\!]^2$, et si celles-ci sont continues sur U.

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On définit les dérivées partielles successives de f par récurrence sur k sur le même modèle.
On dit que f est de classe C^k sur U si f admet des dérivées partielles successives sur U, jusqu'à l'ordre k inclus, par rapport à toutes ses variables et si celles-ci sont continues sur U.

Théorème de Schwarz (admis)

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^p$ et $f : U \to \mathbb{R}^n$ une application **de classe $\mathbf{C^2}$ sur** U.
On a alors $\forall (i,j) \in [\![1,p]\!]^2$, $\forall a \in U$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a)$

Ce théorème se généralise à une fonction de classe C^k : on peut calculer les dérivées partielles successives sans se soucier d'ordre sur les variables dans les dérivations.

Formule de Taylor-Young à l'ordre 2 (admis)

On suppose f de classe C^2 sur un ouvert U de $\mathbb{R}^p$.
Soit $a \in U$, pour $h = (h_1, \dots, h_p)$ au voisinage de $(0, \dots, 0)$, on a

$$f(a+h) = f(a) + \sum_{i=1}^{p} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) + \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{p} h_i h_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)\right) + o(\|h\|^2)\,.$$

III. EXTREMUM D'UNE FONCTION DE 2 VARIABLES

1. Définitions

On suppose $f\,:\,U \to \mathbb{R}$ de classe C^2 sur un ouvert de $\mathbb{R}^2$. On prend $a = (a_1, a_2)$ et $u = (u_1, u_2)$ proche de $(0,0)$.
On s'intéresse aux éventuels extremums de f.
f définit une surface $z = f(x, y)$ dans l'espace $\mathbb{R}^3$.

Définition 13 : U est un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $a \in U$ et f est une application de U dans $\mathbb{R}$.
On dit que f possède un **maximum local** en a si $\exists r > 0,\ \forall x \in U \cap B(a, r),\ f(x) \leqslant f(a)$.
On dit que f possède un **maximum local strict** en a si $\exists r > 0,\ \forall x \in (U \cap B(a, r)) \smallsetminus \{a\},\ f(x) < f(a)$.
On dit que f possède un **maximum global** en a si $\forall x \in U,\ f(x) \leqslant f(a)$.

On a des définitions similaires pour le **minimum**. On parle d'**extremum** si f admet un maximum ou un minimum.

Théorème 1 : *existence d'extremums globaux (admis)*

soit $f\,:\,U \to \mathbb{R}$.
Si f continue sur une partie K fermée bornée de $\mathbb{R}^p$, alors f est bornée sur K et atteint ses bornes.

Cela signifie que si f est continue sur U, et que $K \subset U$ est un fermé borné de $\mathbb{R}^p$. Alors f admet un minimum et un maximum sur K.

Exercice 4: Soit $f\,:\,\mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ continue telle que $\displaystyle\lim_{\|x\| \to +\infty} f(x) = +\infty$, c'est-à-dire que

$$\forall A > 0, \exists B > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}^p,\ \|x\| \geqslant B \Longrightarrow f(x) \geqslant A\,.$$

Montrer que f admet un minimum global.

2. Recherche d'éventuels extremums locaux de f

Proposition 17

Soit f de classe C^1 sur U ouvert de $\mathbb{R}^p$. Soit $a \in U$.
Si f admet un extremum local en a, alors a est un point critique de f.

démo : En effet les applications partielles de f (fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$) admettent un extremum local sur un intervalle ouvert, leur dérivées s'annulent donc en cet extremum.

➢ On commence donc par chercher les points critiques de f (i.e. les points $a \in U$ tels que $\nabla f(a) = (0,0)$). Ces points sont les candidats pour fournir des extremums locaux de f.

➢ On se place dans le cas où a est un point critique de f, et pour savoir si a est effectivement un extremum, on cherche à étudier le signe de $f(a+h) - f(a)$ pour h proche de $(0,0)$.

➢ On suppose que f est de classe C^2 sur U, et c'est là qu'intervient la formule de Taylor-Young, à l'ordre 2 :

$$\boxed{f(a+h) = f(a) + h_1\frac{\partial f}{\partial x}(a) + h_2\frac{\partial f}{\partial y}(a) + \frac{1}{2}\left(h_1^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a) + 2h_1h_2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(a) + h_2^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a)\right) + o(\|h\|^2)\ .}$$

Pour simplifier l'écriture, on note (notations de Monge) : $r = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a)$, $s = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(a)$ et $t = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a)$.

On réécrit la formule ainsi : $\boxed{f(a+h) = f(a) + \nabla f(a)\cdot h + \frac{1}{2}\left(rh_1^2 + 2sh_1h_2 + th_2^2\right) + o(\|h\|^2)\ .}$

➙ Puisque a est supposé être un point critique, on a $\nabla f(a) = 0$, donc
$f(a+h) - f(a) = \frac{1}{2}\underbrace{\left(rh_1^2 + 2sh_1h_2 + th_2^2\right)} + o(\|h\|^2)\ .$
Ce terme donne donc le signe de $f(a+h) - f(a)$ s'il est prépondérant sur $o(\|h\|^2)$.

➙ On cherche à le transformer pour faire apparaître des carrés :
$\lambda_1 w_1^2 + \lambda_2 w_2^2$ avec λ_1, λ_2 des réels et w_1 et w_2 des combinaisons linéaires de h_1 et h_2.

➢ $\boxed{\text{pour } h \text{ proche de } (0,0)\text{, on a donc écrit } f(a+h) - f(a) = \frac{1}{2}\left(\lambda_1 w_1^2 + \lambda_2 w_2^2\right) + o(\|h\|^2)\ .}$

➙ Si $0 < \lambda_1 < \lambda_2$ alors ce terme est prépondérant sur $o(\|h\|^2)$ et toujours positif, donc f admet un minimum local en a.
➙ Si $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$ alors ce terme est prépondérant sur $o(\|h\|^2)$ et toujours négatif, donc f admet un maximum local en a.
➙ Si $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$ alors on peut trouver des valeurs de u pour lesquelles ce terme est prépondérant sur $o(\|h\|^2)$ en prenant des valeurs négatives ou positives : f n'admet pas d'extremum en a. On dit qu'il s'agit d'un point col.
➘ Si $\lambda_1\lambda_2 = 0$, on ne peut pas conclure sur le signe pour tout h, car pour certains h, le terme $\lambda_1 w_1^2 + \lambda_2 w_2^2$ n'est pas prépondérant sur $o(\|h\|)$.

Remarque 3 : On verra plus tard comment interpréter le terme intervenant dans la formule de Taylor-Young à l'ordre 2 *et obtenir* λ_1, λ_2 *par réduction de la matrice hessienne.*

Définition 14 :
On appelle **matrice hessienne** de f en a la matrice de $M_2(\mathbb{R})$ définie par

$$H_f(a) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(a) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(a) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a) \end{pmatrix}.$$

Exemple 7

a. Étude des extremum de $f\ :\ (x,y) \mapsto x^2 + y^2 + \frac{x^3}{4}$.
b. Étude des extremum de $f\ :\ (x,y) \mapsto x^4 + y^4 - 2(x-y)^2$.

ANNEXE 1

Courbes du plan définies par une équation cartésienne

Soit F une fonction de classe C^1 sur $U \subset \mathbb{R}^2$, à valeurs dans $\mathbb{R}$. On munit le plan d'un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

On considère l'ensemble Γ des points M de coordonnées (x, y) tels que $F(x, y) = 0$. On dit alors que Γ est défini par une **équation cartésienne**. On rappelle que $\nabla F(x_0, y_0)$ est le vecteur $\left(\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)\right)$.

On admet le résultat suivant :
si $A(x_0, y_0)$ est un point de Γ tel que $\nabla F(x_0, y_0) \neq \overrightarrow{0}$, alors on peut paramétrer localement Γ.
Cela signifie qu'il existe $t_0 \in \mathbb{R}$, I un intervalle ouvert contenant t_0 et $\varphi : I \mapsto U$ une application de classe C^1 sur I, tels que $\varphi(t_0) = (x_0, y_0)$ et pour (x, y) proche de (x_0, y_0), on a $M(x, y) \in \Gamma \iff \exists t \in I,\ M = M(t)$.

Exemple 8 : Soit la courbe Γ d'équation cartésienne $x^2 + y^2 = 1$. On pose $F : (x, y) \mapsto x^2 + y^2 - 1$.
On considère le point A de coordonnées $(1,0)$. On vérifie que $\nabla F(1,0) \neq \overrightarrow{0}$.
On peut paramétrer Γ au voisinage de A en posant $\varphi : t \mapsto (\sqrt{1-t^2}, t)$, ce paramétrage est valable sur $I =]-1,1[$. On obtient ainsi un demi-cercle.
Proposer un paramétrage de Γ au voisinage du point $B(-1,0)$.

Définition 15 : Soit Γ d'équation cartésienne $F(x, y) = 0$ avec F de classe C^1 sur $U \subset \mathbb{R}^2$.
On dit que le point $A(x_0, y_0)$ de Γ est régulier si $\nabla F(x_0, y_0) \neq \overrightarrow{0}$.

Remarque 4 :
On admet que si le point A est régulier au sens ci-dessus, alors c'est un point régulier de la courbe paramétrée par φ au sens habituel (i.e. $\varphi'(t_0) \neq \overrightarrow{0}$).

Proposition 18

Soit Γ courbe d'équation cartésienne $F(x, y) = 0$ avec F de classe C^1 sur $U \subset \mathbb{R}^2$.
Soit $A(x_0, y_0)$ un point régulier de Γ. Γ admet en A une tangente de vecteur normal $\nabla F(x_0, y_0)$.

démo : On utilise le paramétrage φ et le fait que pour tout $t \in I$, $F(x(t), y(t)) = 0$. On dérive cette égalité pour obtenir le fait que, en un point M_0 de la courbe de paramètre t_0 (et de coordonnées (x_0, y_0)) le vecteur $\nabla F(x_0, y_0)$ est orthogonal au vecteur $(x'(t_0), y'(t_0))$.

Proposition 19

Soit F de classe C^1 sur $U \subset \mathbb{R}^2$.
En un point où il est non nul, le gradient de F est orthogonal aux lignes de niveau $F(x, y) = \lambda$ et orienté dans le sens des valeurs croissantes de F.

démo : on a vu que le gradient est orthogonal aux lignes de niveau $F(x, y) = \lambda$. soit $A(x_0, y_0)$ sur la ligne de niveau $F(x, y) = \lambda$. On suppose que $\nabla F(x_0, y_0) \neq 0$. Si on utilise la formule de Taylor-Young à l'ordre 1 en $a = (x_0, y_0)$ pour F et $u = a + tv$ où $t \in \mathbb{R}$ et $v \in \mathbb{R}^2$, on obtient $F(a + tv) = F(a) + t\nabla F(x_0, y_0) \cdot v + o(\|tv\|)$.
On a pour $v = \nabla F(x_0, y_0)$, $F(a + t\nabla F(x_0, y_0)) - F(a) = t\|\nabla F(x_0, y_0)\|^2 + o(t)$, donc $F(a + t\nabla F(x_0, y_0)) - F(a) \geqslant 0$, pour $t \geqslant 0$.