I. ELEMENTS PROPRES

E désigne un $\mathbb{K}-$espace vectoriel dans ce chapitre.

1. Définition des éléments propres d'un endomorphisme

Définition 1 : ✰ Soit $f \in L(E)$.

➢ On dit que $\lambda \in \mathbb{K}$ est une **valeur propre** de f si $f - \lambda \mathrm{Id}_E$ n'est pas injective.
L'ensemble des valeurs propres de f s'appelle le **spectre de** f, il est noté $Sp(f)$.

➢ Un **vecteur propre** de f est un vecteur x non nul tel que il existe $\lambda \in \mathbb{K}$, $f(x) = \lambda x$.
On dit que x est un vecteur propre associé à λ.

➢ Soit $\lambda \in Sp(f)$.
On appelle **sous-espace propre** associé à λ, et on note $E_\lambda(f)$ le sous-espace de E : $E_\lambda(f) = \ker(f - \lambda \mathrm{Id}_E)$.

Remarque 1 :

- On rappelle que pour f une application linéaire, f est injective si et seulement si $\ker(f) = \{0\}$.
  Prenons $\lambda \in \mathbb{K}$, d'après la définition de valeur propre,
  λ est valeur propre de f si et seulement si $\ker(f - \lambda \mathrm{Id}_E) \neq \{0_E\}$,
  donc si et seulement si il existe $x \in E$ non nul tel que $f(x) = \lambda x$,
  donc si et seulement si il existe un vecteur propre associé à λ.
  La recherche de valeur propre est donc souvent liée à la recherche de vecteur propre.
- Soit $f \in L(E)$, soient $\lambda \in \mathbb{K}$ et $x \in E$. Si $f(x) = \lambda x$ et $x \neq 0$, alors
  - on sait que λ est valeur propre de f (attention on utilise ici $x \neq 0$ sinon c'est faux),
  - on sait que x est un vecteur propre de f, et on dit que x est un vecteur propre de f associé à λ.
- Par définition de λ une valeur propre, le sous-espace propre $E_\lambda(f)$ n'est pas réduit à $\{0\}$.
- $E_\lambda(f)$ est l'ensemble des vecteurs propres de f associés à λ auquel on adjoint 0 (qui n'est pas un vecteur propre). *"Fluidité" : il faut avoir bien compris que : $u \in E_\lambda(f) \iff f(u) = \lambda u$.*
- $\lambda = 0$ est une valeur propre de f si et seulement si f n'est pas injective. Dans ce cas, $E_0(f) = \ker f$.
- *Éléments propres et* 0 *: une valeur propre peut-être nulle, un vecteur propre ne peut pas être nul, un sous-espace propre ne peut pas être* $\{0\}$ *(notez qu'on ne parle pas toujours du même* 0 *dans les différents cas).*

Exercice 1

a. Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^2)$ définie par $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) = (2x, x + y)$. Pour quelles valeurs de $\lambda \in \mathbb{R}$, l'application $f - \lambda \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}$ est-elle bijective ? Déterminer les valeurs propres de f.

b. Soit $f : M \mapsto M^T$ définie de $M_3(\mathbb{R})$ dans lui-même. Montrer que 1 et -1 sont des valeurs propres de f.

c. Soit $\varphi : y \mapsto y'$ définie de $C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ dans $C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Déterminer les vecteurs propres de f.

Proposition 1

Soit $f \in L(E)$.

- Soit $x \in E$, x est un vecteur propre de f si et seulement si $x \neq 0$ et la droite vectorielle $\mathrm{Vect}(x)$ est stable par f.
- Pour tout $\lambda \in Sp(f)$, $E_\lambda(f)$ est stable par f.

démo : Soit $x \in E$.

➢ Supposons que x est un vecteur propre. On note λ la valeur propre associée.
On sait alors que $x \neq 0$ (définition de vecteur propre).
Prenons $u \in \mathrm{Vect}(x)$: u s'écrit $u = \alpha x$ avec $\alpha \in \mathbb{K}$. On a $f(u) = \alpha f(x)$. Or $f(x) = \lambda x$ (hypothèse sur x), donc $f(u) = \alpha \lambda x$.
Ainsi $f(u) \in \mathrm{Vect}(x)$, on conclut que $\mathrm{Vect}(x)$ est stable par f.

➢ Supposons que $x \neq 0$ et $\mathrm{Vect}(x)$ est stable par f.
x est un vecteur de $\mathrm{Vect}(x)$, donc, par hypothèse, $f(x) \in \mathrm{Vect}(x)$: cela signifie qu'il existe $\alpha \in \mathbb{K}$ tel que $f(x) = \alpha x$. On sait de plus que $x \neq 0$, donc x est un vecteur propre (associé à α).

Proposition 2 ☆

> Soit $f \in L(E)$.
> ➢ Une somme finie de sous-espaces propres associés à des valeurs propres distinctes de f est directe.
> ➢ Toute famille de vecteurs propres de f associés à des valeurs propres distinctes est une famille libre.

démo : ➢ Traduisons ce qu'il faut montrer :
Soient $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_p$ des valeurs propres disctinctes de f. La somme des sous-espaces propres $E_{\lambda_1}, E_{\lambda_2}, \dots, E_{\lambda_p}$ est directe.
On montre ce résultat par récurrence sur p, en utilisant la caractérisation d'une somme directe : $E_1, \dots, E_2$ sont en somme directe si et seulement si $\forall u_1, \dots, u_p \in E_1 \times \cdots \times E_p$, $u_1 + \cdots + u_p = 0 \implies u_1 = u_2 = \cdots = u_p = 0$.
<u>initialisation</u> : pour $p = 2$. On considère $u_1 \in E_1$ et $u_2 \in E_2$ tels que $u_1 + u_2 = 0$.
On applique f : $f(u_1) + f(u_2) = 0$, donc $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 = 0$. On combine les deux égalités, pour obtenir : $(\lambda_2 - \lambda_1)u_2 = 0$.
Comme $\lambda_1 \neq \lambda_2$, on conclut que $u_2 = 0$ et donc $u_1 = 0$.
<u>hérédité</u> : on suppose l'hypothèse vraie au rang p avec $p \geqslant 2$.
On considère donc $u_1, \dots, u_{p+1} \in E_1 \times \cdots \times E_{p+1}$ tels que $u_1 + \cdots + u_{p+1} = 0$.
On applique f et on utilise la définition des E_i pour obtenir : $\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_p u_p + \lambda_{p+1} u_{p+1} = 0$.
En combinant ces deux égalités, on élimine u_{p+1} : $(\lambda_1 - \lambda_{p+1})u_1 + \cdots + (\lambda_p - \lambda_{p+1})u_p = 0$.
On peut alors remarquer que on a une somme de vecteurs de E_1, E_2, etc, E_p qui est nulle. Par hypothèse de récurrence, chacun de ces vecteurs est nul. Donc $\forall i \in [\![1, p]\!]$, $(\lambda_i - \lambda_{p+1})u_i = 0$. Or $(\lambda_i - \lambda_{p+1}) \neq 0$ donc $u_i = 0$.
Ainsi on a $u_1 = \cdots = u_p = 0$ et on en déduit $u_{p+1} = 0$ avec la toute première égalité.
On conclut par le principe de récurrence.
➢ Démonstration similaire pour le deuxième point.

Exercice 2

- <u>Cas des homothéties</u> : soit $h = \alpha \mathrm{Id}_E$ avec $\alpha \in \mathbb{K}^*$.
  h admet α pour unique valeur propre et le sous-espace propre associé est $E_\alpha(h) = E$.
- <u>Cas des projecteurs</u> : Soit $p \in L(E)$ un projecteur, différent de $0_{L(E)}$ et de Id_E. Montrer que 0 et 1 sont des valeurs propres de p. Montrer ensuite que $Sp(p) = \{0, 1\}$. Décrire les sous-espaces propres de p et vérifier qu'ils sont en somme directe.
- <u>Cas des symétries</u> : Soit $s \in L(E)$ une symétrie. Montrer que $Sp(s) = \{-1, 1\}$. Décrire les sous-espaces propres de s et vérifier qu'ils sont en somme directe.

En dimension finie

Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de **dimension finie**. Soit $f \in L(E)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.
$f - \lambda \mathrm{Id}_E$ est un endomorphisme de E, de dimension finie, on peut donc caractériser l'injectivité par :

$$\begin{aligned} f - \lambda \mathrm{Id}_E \text{ est injectif } & \text{ si et seulement si } f - \lambda \mathrm{Id}_E \text{ est bijectif} \\ & \text{ si et seulement si } \det(f - \lambda \mathrm{Id}_E) \neq 0 \end{aligned}$$

Proposition 3

> Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension finie. Soit $f \in L(E)$. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$.
> $\lambda \in Sp(f) \iff \det(f - \lambda \mathrm{Id}_E) = 0$.

⚠ *C'est une caractérisation* **en dimension finie**, *ce n'est pas la définition de valeur propre.*

Remarque 2 : Pour calculer un déterminant d'endomorphisme, on utilise les matrices. Prenons une base $\mathcal{B}$ de E.
On note A la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$. On a donc $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f - \lambda \mathrm{Id}_E) = A - \lambda I_n$.
Ainsi, pour $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda \in Sp(f) \iff \det(A - \lambda I_n) = 0$.

2. Éléments propres d'une matrice carrée

Définition 2 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$.

- On dit que λ est une valeur propre de A si $A - \lambda I_n$ n'est pas inversible, i.e. si $\det(A - \lambda I_n) = 0$.
  On note $Sp(A)$ l'ensemble des valeurs propres de A.
- On dit que $X \in M_{n,1}(\mathbb{K})$ est un vecteur propre de A si $X \neq 0$ et $\exists \lambda \in \mathbb{K},\ AX = \lambda X$.
- Si $\lambda \in Sp(A)$, on note $E_\lambda(A) = \ker(A - \lambda I_n) = \{X \in M_{n,1}(\mathbb{K})\ /\ AX = \lambda X\}$. C'est un sous-espace vectoriel de $M_{n,1}(\mathbb{K})$.

Remarque 3 :

➢ Pour $A \in M_n(\mathbb{K})$, on peut définir f l'endomorphisme canonique associé à A. On a alors $\mathrm{Sp}(A) = \mathrm{Sp}(f)$.
Les vecteurs propres et sous-espaces propres de A et f se correspondent (mais les vecteurs propres de A sont des vecteurs de $M_{n,1}(\mathbb{K})$ et ceux de f des vecteurs de $\mathbb{K}^n$).

➢ Toutes les remarques sur les éléments propres des endomorphismes se transposent aux éléments propres des matrices.

Exercice 3: Déterminer le spectre des matrices suivantes : $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ puis $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

3. Polynôme caractéristique

On se place dans ce paragraphe en dimension finie : E est un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$.

Proposition 4 ✰ *Définition du polynôme caractéristique*

Soit $f \in L(E)$. L'application $\lambda \mapsto \det(\lambda \mathrm{Id}_E - f)$ est polynomiale.
Le polynôme associé s'appelle le polynôme caractéristique de f, on le note χ_f.
Son degré est n et son coefficient dominant est 1.

démo : ➢ On commence par prouver, par récurrence sur n, le résultat suivant :

le déterminant d'une matrice $M(\lambda) \in M_n(\mathbb{K})$ dont les coefficients sont des expressions affines de λ, est une fonction polynomiale en λ, de degré inférieur ou égal à n.

Écrire l'initialisation pour $n = 1$ et $n = 2$.
On obtiendra l'hérédité en utilisant un développement par rapport à la première colonne.

➢ On prouve ensuite, par récurrence sur n : Pour toute matrice A de $M_n(\mathbb{K})$, l'application $\lambda \mapsto \det(\lambda I_n - A)$ est une fonction polynomiale de degré n et de coefficient dominant égal à 1.

➙ On vérifie le résultat pour $n = 1$ et $n = 2$.

➙ On suppose le résultat vrai pour un n fixé non nul. Prenons une matrice $A = (a_{ij}) \in M_{n+1}(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

$\det(\lambda I_{n+1} - A) = \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \dots & -a_{1n+1} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \dots & -a_{2n+1} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ -a_{n+11} & -a_{n+12} & \dots & \lambda - a_{n+1n+1} \end{vmatrix}$. On développe suivant la première colonne, en isolant le premier terme : $\det(\lambda I_{n+1} - A) = (\lambda - a_{11})\Delta_{11}(\lambda) + \sum_{i=2}^{n+1} (-1)^{1+i}(-a_{i1})\Delta_{i1}(\lambda)$,
où $\Delta_{i1}(\lambda)$ est le déterminant de la matrice de $M_n(\mathbb{K})$ obtenue en supprimant la ligne i et la colonne 1 de $\lambda I_n - A$.

On applique l'hypothèse de récurrence à $\Delta_{11}(\lambda) = \det(\lambda I_n - A_{11})$ où A_{11} désigne la matrice obtenue en supprimant la ligne et la colonne 1 de A : ce terme est polynomial de degré n et coefficient dominant 1. Donc $(\lambda - a_{11})\Delta_{11}(\lambda)$ est une expression polynomiale en λ de degré $n + 1$ et de coefficient dominant 1.

On applique notre premier résultat aux termes $\Delta_{i1}(\lambda)$ pour justifier que ce sont des termes polynomiaux de degré inférieur ou égal à n. On conclut alors par considération de degrés : $\det(\lambda I_{n+1} - A)$ est une expression polynomiale de degré $n + 1$ et de coefficient dominant égal à 1.

➙ On conclut par le principe de récurrence.

Proposition 5

Soit $f \in L(E)$. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$.
$\lambda \in \mathrm{Sp}(f) \iff \lambda$ est une racine de χ_f.

démo : Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. $\lambda \in \mathrm{Sp}(f) \iff (f - \lambda \mathrm{Id}_E)$ n'est pas injective. Or f est un endomorphisme et E est de dimension finie, donc $(f - \lambda \mathrm{Id}_E)$ non injective équivaut à $(f - \lambda \mathrm{Id}_E)$ non bijective, ou encore à $\det(f - \lambda \mathrm{Id}_E) = 0$.
Ainsi, $\lambda \in \mathrm{Sp}(f) \iff \chi_f(\lambda) = 0$.

Remarque 4 :
On parlera de la même manière du polynôme caractéristique χ_A d'une matrice $A \in M_n(\mathbb{K})$:
$\chi_A(X) = \det(XI_n - A)$.

Proposition 6 ✰

Deux matrices semblables ont le même polynôme caractéristique.

démo : Prenons A et B semblables. Cela signifie qu'il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que $B = P^{-1}AP$.
On a, pour $\lambda \in \mathbb{K}$, $\det(B - \lambda I_n) = \det(P^{-1}AP - \lambda I_n) = \det(P^{-1}(A - \lambda I_n)P) = \det(A - \lambda I_n)$.

Exercice 4 :

a. $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Déterminer le polynôme caractéristique de A et les valeurs propres de A.

b. $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & (x+y, -y-z, 2x+y+z) \end{array}$.
Déterminer le spectre de f en calculant son polynôme caractéristique.

Rappels sur les racines d'un polynôme

D'après le théorème fondamental de l'algèbre (dit de D'alembert-Gauss), un polynôme P non constant de $\mathbb{C}[X]$ est scindé sur $\mathbb{C}$. Notons $n = \deg(P)$, on a

$$\exists \lambda \in \mathbb{C}^*,\ \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{C}, \text{ tels que } P = \lambda \prod_{i=1}^{n} (X - \alpha_i)\ .$$

On peut également écrire ceci en introduisant l'ordre de multiplicité des racines :

$$\exists \lambda \in \mathbb{C}^*,\ \alpha_1, \dots, \alpha_p \in \mathbb{C} \text{ disctincts},\ s_1, \dots, s_p \in \mathbb{N}^* \text{ tels que } P = \lambda \prod_{i=1}^{p} (X - \alpha_i)^{s_i}\ .$$

Cela implique que tout polynôme de $\mathbb{C}[X]$ non nul, de degré n, a au plus n racines dans $\mathbb{C}$ et exactement n racines comptées avec multiplicité.
Tout polynôme de $\mathbb{R}[X]$, non nul, de degré n, a au plus n racines dans $\mathbb{R}$ (et s'il a n racines distinctes alors il a exactement n racines simples).

Définition 3 : Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension finie. Soit $f \in L(E)$ et χ_f son polynôme caractéristique. Soit λ une valeur propre de f. La multiplicité de cette valeur propre est son ordre de multiplicité comme racine du polynôme caractéristique χ_f.

Remarque 5 : un endomorphisme f admet donc
➙ au plus n valeurs propres comptées avec multiplicité si E est un $\mathbb{R}-$espace vectoriel de dimension n.
➙ exactement n valeurs propres comptées avec multiplicité si E est un $\mathbb{C}-$ev de dimension n.
On a les mêmes conclusions pour une matrice de $M_n(\mathbb{R})$ ou de $M_n(\mathbb{C})$.

Proposition 7 ✰ *Lien entre multiplicité d'une vap et dimension du ssep associé*

Soit E un $\mathbb{K}$−espace vectoriel de dimension finie. Soit $f \in L(E)$ et soit λ_0 une valeur propre de f de multiplicité $s(\lambda_0)$. On note $d(\lambda_0)$ la dimension de $E_{\lambda_0}(f) = \ker(f - \lambda_0 \mathrm{Id}_E)$.
On a alors $1 \leqslant d(\lambda_0) \leqslant s(\lambda_0)$.

démo : ➢ On considère une base de $E_{\lambda_0}(f)$ que l'on complète en une base $\mathscr{B}$ de E. On note donc $(e_1, \ldots, e_p)$ une base de $E_\lambda(f)$ et $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$. On a ainsi $p = d(\lambda_0)$. On sait qu'un sous-espace propre n'est pas réduit à $\{0\}$ donc $1 \leqslant d(\lambda_0)$.
➢ On écrit la matrice de f dans cette base et on calcule $\det(\lambda \mathrm{Id}_E - f)$ à partir de cette matrice. On a $f(e_i) = \lambda_0 e_i$ pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, ce qui fournit les premières colonnes de la matrice $M_{\mathscr{B}}(f)$. On en déduit que $(\lambda - \lambda_0)^p$ divise le polynôme caractéristique. Donc la multiplicité de la racine λ_0 est au moins égale à p. On a ainsi $d(\lambda_0) \leqslant s(\lambda_0)$.

II. DIAGONALISATION

E désigne un $\mathbb{K}$−espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$ dans ce paragraphe.

1. Définition de la diagonalisabilité

Définition 4 : ✰
Soit $f \in L(E)$. On dit que f est diagonalisable s'il existe une base $\mathscr{B}$ de E telle que la matrice de f dans $\mathscr{B}$ est diagonale.

Remarque 6 : Soit $f \in L(E)$ diagonalisable :

- Comment trouver une base $\mathscr{B}$ telle que $D = Mat_{\mathscr{B}}(f)$ soit diagonale ?
- Que va-t-on trouver sur la diagonale de cette matrice ?
- Quelles sont les conséquences sur le déterminant et la trace de f ?

Proposition 8 ✰

f est diagonalisable si et seulement si il existe une base $\mathscr{B}$ de E formée de vecteurs propres de f.

démo ➢ On suppose que f est diagonalisable. On prend une base $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ dans laquelle sa matrice est diagonale. On remarque que tous les vecteurs e_i sont non nuls (car ils sont vecteurs d'une base). Par lecture de la matrice, on en déduit que les e_i sont des vecteurs propres de f.
➢ On suppose qu'il existe une base $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ formée de vecteurs propres de f.
On a donc pour tout $i \in [\![1, n]\!], \exists \lambda_i \in \mathbb{K}$ tel que $f(e_i) = \lambda_i e_i$. On forme la matrice de f dans la base $\mathscr{B}$: elle est diagonale.

Définition 5 : ✰ Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$.
On dit que A est diagonalisable s'il existe une matrice D diagonale semblable à A,
i.e. si il existe D diagonale et $P \in GL_n(\mathbb{K})$ telles que $D = P^{-1}AP$.

Remarque 7 :

- Soit $f \in L(E)$ et A représentant f dans une base $\mathscr{B}$.
  f est diagonalisable si et seulement si A est diagonalisable.
- Toute matrice diagonale est diagonalisable ! Toute matrice semblable à une matrice diagonalisable est diagonalisable.
- On suppose que $A \in M_n(\mathbb{K})$ est semblable à I_n : que peut-on dire de A ?

2. Caractérisations de la diagonalisibilité

Proposition 9 ✰ *CNS de diagonalisabilité*

> Soit E de dimension finie et $f \in L(E)$.
> f est diagonalisable si et seulement si la somme (directe) de ses sous-espaces propres est égale à E, i.e. $\bigoplus_{\lambda \in Sp(f)} E_\lambda(f) = E$.

démo : On rappelle tout d'abord que l'on a démontré que la somme $F = \bigoplus_{\lambda \in Sp(f)} E_\lambda(f)$ est une somme directe de sous-espaces propres. Notons $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ les valeurs propres distinctes de f.

On sait donc que $\sum_{i=1}^{p} \dim(E_{\lambda_i}(f)) = \dim F$ et bien sûr $F \subset E$.

➢ Supposons que f est diagonalisable. On veut montrer que $F = E$, donc il nous reste à montrer $E \subset F$.

Il existe une base $\mathscr{B}_1$ de E, formée de vecteurs propres de f. On peut regrouper les vecteurs de la base par valeur propre associée :

$$\mathscr{B}_1 = (\underbrace{e_1, \ldots, e_{d_1}}_{\text{associés à } \lambda_1}, \underbrace{e_{d_1+1}, \ldots, e_{d_1+d_2}}_{\text{associés à } \lambda_2}, \ldots, \underbrace{e_{d_1+d_2+\cdots+d_{p-1}+1}, \ldots, e_{d_1+d_2+\cdots+d_p}}_{\text{associés à } \lambda_p}).$$

Prenons un vecteur x de E, il s'écrit comme somme de vecteurs de la base $\mathscr{B}_1$, donc comme somme de vecteurs de $E_{\lambda_1}(f)$, $E_{\lambda_2}(f)$, ..., $E_{\lambda_p}(f)$. Donc tout vecteur x de E est dans F. On peut conclure que $E = F$.

➢ Réciproquement, on suppose que $E_{\lambda_1} \oplus E_{\lambda_2} \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_p} = E$.

On prend une base de chacun des E_{λ_i} et on réunit tout ces vecteurs, cela forme une base de E (car la somme est directe et vaut E). On conclut que f est diagonalisable car on a trouvé une base de E formée de vecteurs propres de f.

Remarque 8 : Montrez que de ce théorème, on déduit le résultat suivant :

Soit E de dimension n et $f \in L(E)$ avec ses valeurs propres distinctes $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$. On note pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, $d(\lambda_i)$ la dimension du sous-espace propre $E_{\lambda_i}(f)$.

f est diagonalisable si et seulement si $\sum_{i=1}^{p} d(\lambda_i) = n$.

Proposition 10 ✰ *CNS de diagonalisabilité*

> Soit E de dimension finie et $f \in L(E)$. Pour une valeur propre λ de f, on note $s(\lambda)$ la multiplicité de λ et $d(\lambda)$ la dimension du sous-espace propre $E_\lambda(f)$.
> f est diagonalisable si et seulement si χ_f est scindé (sur $\mathbb{K}$) **et** pour toute valeur propre λ de f, $d(\lambda) = s(\lambda)$.

démo : ➢ Supposons f diagonalisable. On écrit la matrice diagonale D de f dans une base $\mathscr{B}$ de E qui convient. On note $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ les valeurs propres distinctes de f, s_i la multiplicité de λ_i et d_i la dimension du sous-espace propre associé à λ_i.

On considère D : elle est formée de blocs diagonaux avec des λ_i sur la diagonale. λ_1 apparaît d_1 fois,... Donc en calculant le polynôme caractéristique de f à partir de cette matrice D, on montre que $\chi_f = \prod_{i=1}^{p} (X - \lambda_i)^{d_i}$. On en déduit que ce polynôme est scindé et $\forall i \in [\![1, p]\!]$, $d(\lambda_i) = s_i$.

➢ Supposons que χ_f est scindé et que, pour toute valeur propre λ de f, $d(\lambda) = s(\lambda)$.

Comme χ_f est scindé, il sécrit $\chi_f = \prod_{i=1}^{p} (X - \lambda_i)^{s_i}$, et on sait qu'il est de degré n donc $n = \sum_{i=1}^{p} s_i$.

Alors en réunissant des bases des sous-espaces propres $E_{\lambda_i}(f)$, on obtient une famille de vecteurs propres qui comporte $\sum_{i=1}^{p} d(\lambda_i) = \sum_{i} s(\lambda_i) = n$ vecteurs. De plus, c'est une famille libre (car réunion de bases de vecteurs propres). C'est donc une base de E formée de vecteurs propres de f.

Proposition 11 ✰ *CS de diagonalisabilité*

Un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension n ayant n valeurs propres distinctes est diagonalisable.

démo : Soit E un $\mathbb{K}-$ev de dimension n et $f \in \mathscr{L}(E)$.

Le résultat est une conséquence de ce qui précède. Voici les étapes de la preuve :

➢ f a n valeurs propres distinctes et χ_f est de degré n donc χ_f est scindé à racines simples.

➢ La dimension de chaque sous-espace propre est donc égale à 1, car $1 \leqslant d(\lambda) \leqslant s(\lambda) = 1$ pour λ une valeur propre.

➢ on sait donc que la dimension de chaque sous-espace propre est 1, donc égale à la multiplicité de la valeur propre associée.

En pratique, pour un endomorphisme f d'un espace de dimension finie n, vous aurez à répondre à deux questions : "f est-il diagonalisable ? " ou "diagonaliser f.".

- f est-il diagonalisable ? :
  ➢ La réponse sera oui ou non (*avec justification bien sûr !*). En général (*mais pas toujours, suivre la logique de l'énoncé...*)
  ➢ On cherche le polynôme caractéristique de f et ses racines (les valeurs propres de f).
  ➙ si χ_f est n'est pas scindé sur $\mathbb{K}$, la réponse est non.
  ➙ si χ_f est scindé,
  → à racines simples, la réponse est oui (*on cite la CS*)
  → avec une ou plusieurs racines multiples : on cherche la dimension des sous-espaces propres associés à chaque racine multiple et on regarde si la dimension est égale à la multiplicité. Si oui, la réponse est oui, sinon la réponse est non (*on cite la CNS*).
  La démarche est la même pour répondre à : "A est-elle diagonalisable ?" où $A \in M_n(\mathbb{K})$.

- diagonaliser un endomorphisme f :
  ➢ La réponse sera la donnée d'une base $\mathscr{B}$ de vecteurs propres de f (dans laquelle la matrice de f est forcément diagonale) et de la matrice diagonale correspondante (avec forcément les valeurs propres de f sur la diagonale !).
  ➢ Comment fait-on pour obtenir une base $\mathscr{B}$ de vecteurs propres de f lorsque f est diagonalisable ?
  ➙ on cherche les valeurs propres de f (souvent en calculant le polynôme caractéristique de f et ses racines),
  ➙ on cherche une base de chacun des sous-espaces propres (*et ils sont tous de dimension au moins* 1 *!*),
  ➙ on réunit les bases ainsi trouvées, ce sera une base $\mathscr{B}'$ de E (*car f est diagonalisable !*). La matrice de f dans $\mathscr{B}'$ est diagonale (*vous devez savoir expliquer ceci !*).

- diagonaliser une matrice A :
  ➢ La réponse sera la donnée d'une matrice P inversible et une matrice D diagonale telles que $D = P^{-1}AP$. (*Encore une fois, la diagonale de D contient forcément les valeurs propres de A et P est formée de vecteurs propres de A*).
  ➢ Comment fait-on pour obtenir P et D ?
  ➙ on cherche les valeurs propres de A,
  ➙ on cherche une base de chacun des sous-espaces propres de A,
  ➙ si on réunit les bases trouvées, on obtient une base $\mathscr{B}'$ de $M_{n,1}(\mathbb{K})$,
  ➙ on forme la matrice de passage P de la base canonique de $M_{n,1}(\mathbb{K})$ vers la base $\mathscr{B}'$ formée par les vecteurs propres de A, et on met dans la matrice diagonale les valeurs propres correspondantes à chaque vecteur propre mis dans P (dans l'ordre !).

III. TRIGONALISATION

E désigne un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension finie dans ce paragraphe.

Définition 6 : ✰ Soit $f \in L(E)$.
f est trigonalisable s'il existe une base de E dans laquelle la matrice de f est triangulaire supérieure.

Remarque 9 : Si la matrice de f est triangulaire inférieure dans une base $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ alors sa matrice dans $\mathscr{B}' = (e_n, e_{n-1}, \dots, e_1)$ est triangulaire supérieure.

Proposition 12 ✰

- Soit $f \in L(E)$.
  f est trigonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique χ_f est scindé (sur $\mathbb{K}$).
- Tout endomorphisme d'un $\mathbb{C}-$espace vectoriel est trigonalisable.

démo : le premier point est admis. Le deuxième découle du théorème de D'Alembert-Gauss.

On étend les définitions aux matrices : soit $A \in M_n(\mathbb{K})$.
A est trigonalisable si elle est semblable à une matrice triangulaire supérieure.
A est trigonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé.

Exercice 5

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$. Montrer que A est trigonalisable mais pas diagonalisable.

2. Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.
On veut montrer que A et B sont semblables.
Déterminer les valeurs propres de A et ses sous-espaces propres.
On pose $\varepsilon_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, puis $\varepsilon_2 = f(\varepsilon_3) + \varepsilon_3$. Déterminer ε_1 tel que $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ soit une base de $\ker(A + I_3)$.
Conclure.

Proposition 13

Soit $f \in L(E)$. On note $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ les valeurs propres (dans $\mathbb{K}$) distinctes de f et $s_i, \dots, s_p \in \mathbb{N}^*$ leurs multiplicités respectives.
Si f est trigonalisable alors $\det f = \prod_{i=1}^{p} \lambda_i^{s_i}$ et $\operatorname{tr}(f) = \sum_{i=1}^{p} s_i \lambda_i$.

démo : On suppose que f est trigonalisable et on note $\mathscr{B}$ une base de E dans laquelle $A = \operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$ est triangulaire supérieure. Les coefficients diagonaux de A sont les valeurs propres de f (détails : considérer le polynôme caractéristique de f et le calculer avec A). On en déduit la propriété car $\det(f) = \det A$ et $\operatorname{tr}(f) = \operatorname{tr}(A)$.

Remarque 10 : Soit $f \in \mathscr{L}(E)$, avec E un $\mathbb{R}-$ev ou un $\mathbb{C}-$ev. Le polynôme caractéristique de f admet n racines complexes (comptées avec multiplicité), donc la propriété précédente s'applique et permet d'exprimer $\det f$ et $\operatorname{tr}(f)$ en fonction de ces racines.

IV. APPLICATIONS

1. Calcul des puissances d'une matrice carrée : Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$, on veut calculer A^k pour $k \in \mathbb{N}$.

➢ Voici une démarche possible lorsque A est diagonalisable :
➞ diagonaliser A : trouver D diagonale et $P \in GL_n(\mathbb{K})$ telles que $D = P^{-1}AP$.
➞ On calcule alors facilement D^k pour $k \in \mathbb{N}$.
➞ On montre que $A = PDP^{-1}$ puis par récurrence (sur k) que $A^k = PD^kP^{-1}$.

Exercice 6 : Calculer les puissances de $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

Il existe d'autres méthodes suivant les caractéristiques de A :

➢ Utilisation du binôme de Newton avec $B = A - I_n$
B et I_n commutent, donc pour $k \in \mathbb{N}$, $A^k = (I_n + B)^k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} B^j$.
Cela fournit une réponse simple lorsque $B^2 = I_n$ ou $B^2 = B$ par exemple, lorsque les puissances de B sont faciles à calculer.

➢ utilisation d'un polynôme annulateur : On suppose qu'il existe $T \in \mathbb{R}[X]$ tel que $T(A) = 0$.
➞ On effectue la division euclidienne de X^k par T : $X^k = T \times Q + R$ avec $\deg R < \deg T$.
On détermine le polynôme R (à l'aide des racines de T en général).
➞ On "transpose" l'égalité de polynôme dans les matrices (il y a un morphisme d'algèbre derrière ceci) : $A^k = T(A) \times Q(A) + R(A)$ donc $A^k = R(A)$ (*les coefficients de R dépendent de k ici.*)
➞ Essayez avec A une matrice de $M_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 + 2A - 3I_n = 0$.

2. Suites vérifiant une relation de récurrence linéaire

Exercice 7

a. Déterminer les suites réelles (u_n) telles que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$.
Première méthode : c'est une suite définie par une relation de récurrence linéaire d'ordre 2. On pose l'équation caractéristique (E_c) : $r^2 = 3r - 2$. etc...
Deuxième méthode : transformer la relation de récurrence d'ordre 2 en une relation vectorielle de récurrence d'ordre 1. Pour cela on pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$.
On a ainsi, $\forall n \in \mathbb{N},\ X_{n+1} = AX_n$ et donc par récurrence, $\forall n \in \mathbb{N},\ X_n = A^n X_0$. Il ne reste plus qu'à calculer A^n.

b. Déterminer (u_n) définie par $u_0 = 0$, $u_1 = -1$ et $u_2 = 1$, et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+3} = 2u_{n+2} + u_{n+1} - 2u_n$.
On transformera la relation en une relation vectorielle de récurrence d'ordre 1.

Définition 7 : Soit $a_0, \dots, a_{p-1}$ dans $\mathbb{K}$.
On dit que la suite $(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ vérifie une relation de récurrence linéaire d'ordre p à coefficients constants si $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+p} = \sum_{k=0}^{p-1} a_k u_{n+k} \qquad (\mathscr{R})$.

Proposition 14

Soit $a_0, \dots, a_{p-1}$ dans $\mathbb{K}$.
L'ensemble des suites (u_n) vérifiant une telle relation $(\mathscr{R})$ de récurrence linéaire à coefficients constants (fixés) est un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension p.
Une telle suite est uniquement déterminée par la donnée de ses p premiers termes.

Conséquence : pour trouver l'ensemble $\mathscr{E}$ des suites vérifiant la relation de récurrence $(\mathscr{R})$, il suffit de trouver une base de $\mathscr{E}$, donc p suites qui forment une famille libre de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.

3. Systèmes différentiels linéaires d'ordre 1

a. Définitions

- Un **système différentiel linéaire d'ordre 1** à coefficients constants est de la forme

$$X' = AX + B(t) \quad (E)$$

où l'inconnue X est une fonction de I dans $\mathbb{K}^n$, $A \in M_n(\mathbb{K})$, et $B : I \to \mathbb{K}^n$ est continue (et $n \in \mathbb{N}^*$).

- Une **solution de** (E) est la donnée d'un intervalle J et d'une fonction $X : J \to \mathbb{K}^n$, dérivable sur J et telle que

$$\forall t \in J,\ X'(t) = AX(t) + B(t)\ .$$

- **L'équation homogène** associée à (E) est $X' = AX$.

Les fonctions considérées sont donc à valeurs vectorielles.
On notera $X : \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{K}^n \\ t & \mapsto & (x_1(t), \dots, x_n(t)) \end{array}$ et $B : \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{K}^n \\ t & \mapsto & (b_1(t), \dots, b_n(t)) \end{array}$.

b. Problème de Cauchy

Soit (3) l'équation différentielle $X' = AX + B(t)$ où $A \in M_n(\mathbb{K})$, $B : I \to \mathbb{K}^n$ est continue sur I.
Soit $(t_0, (y_1, \dots, y_n)) \in I \times \mathbb{K}^n$.
Résoudre le problème de Cauchy relatif à (3) et aux données initiales $(t_0, (y_1, \dots, y_n))$ consiste à chercher les solutions X de (3) vérifiant $X(t_0) = (y_1, \dots, y_n)$.

Proposition 15 *Théorème de Cauchy*

Soit (3) l'équation différentielle $X' = AX + B(t)$ où $A \in M_n(\mathbb{K})$, $B : I \to \mathbb{K}^n$ est continue I.
Soit $(t_0, (y_1, \dots, y_n)) \in I \times \mathbb{K}^n$.
Le problème de Cauchy de (3) relatif aux données initiales $(t_0, (y_1, \dots, y_n))$ admet une unique solution φ définie sur I.

c. Structure de l'ensemble des solutions

On considère l'équation (E) $X' = AX + B(t)$ et (H) $X' = AX$ où $A \in M_n(\mathbb{K})$, $B : I \to \mathbb{K}^n$ est continue I.

Proposition 16

- L'ensemble $\mathscr{S}_0$ des solutions de l'équation homogène (H) est un $\mathbb{K}-$ev de dimension n.
- Si il existe f_0 solution de (E) alors l'ensemble des solutions de (E) est $\{f_0 + f,\ f \in \mathscr{S}_0\}$.

dem : On fixe $t_0 \in I$, grâce au théorème de Cauchy, on montre que l'application $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathscr{S}_0 & \mapsto & \mathbb{K}^n \\ X & \to & X(t_0) \end{array}$ est un isomorphisme de $\mathbb{K}-$espace vectoriel. Le théorème de Cauchy permet aussi d'affirmer qu'il existe une solution f_0 de (E).

Le principe de superposition est toujours valable.

d. Méthodes de résolution

A. $\boxed{\text{Cas où } A \text{ est diagonalisable dans } \mathbb{K}}$

➢ On diagonalise A : on trouve $D \in M_n(\mathbb{K})$ diagonale et $P \in GL_n(\mathbb{K})$ telles que $D = P^{-1}AP$.

⋆ On pose $Y = P^{-1}X$ et $B_1(t) = P^{-1}B$: X est solution de (E) si et seulement si $\boxed{Y' = DY + B_1(t)}$.

⋆ Notons $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$, $D = diag(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ et $B_1(t) = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}$.

Le système à résoudre est alors $\left\{\begin{array}{lllll} y_1' & = & \lambda_1 y_1 & + & \beta_1(t) \\ y_2' & = & \lambda_2 y_2 & + & \beta_2(t) \\ \vdots & & \vdots & & \\ y_n' & = & \lambda_n y_n & + & \beta_n(t) \end{array}\right.$.

On résout chacune des équations différentielles linéaires d'ordre 1.

➢ On revient à l'inconnue X par la relation $X = PY$.

Mais on remarquera que si l'équation est homogène, il est inutile de calculer P^{-1}.

Par le résultat sur la structure de l'ensemble des solutions, on peut aussi éviter ce calcul si l'on trouve directement une solution de l'équation complète.

Exemple 1 : Résoudre $\left\{\begin{array}{ll} x' & = 2x + z \\ y' & = 2y - z \\ z' & = x - y + z \end{array}\right.$

Exemple 2 : Résoudre $\left\{\begin{array}{ll} x' & = 3x + 3y - 2z + e^t \\ y' & = x + y + 2z \\ z' & = x + 3y + e^t \end{array}\right.$

B. $\boxed{\text{Cas où } A \text{ est triangulaire}}$

➢ A est supposée triangulaire, on note $\lambda_1,\ \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ les coefficients diagonaux de A.

Le système à résoudre est alors $\left\{\begin{array}{lllllll} x_1' & = & \lambda_1 x_1 & + & \ldots & + \quad \ldots & + b_1(t) \\ x_2' & = & & & \lambda_2 x_2 & + \quad \ldots & + b_2(t) \\ \vdots & & & & \vdots & & \\ x_n' & = & & & & \lambda_n x_n & + b_n(t) \end{array}\right.$.

➢ On résout d'abord la dernière équation puis on utilise la forme de x_n obtenue pour résoudre l'avant-dernière, etc.... On remonte ainsi le système qui ne comporte que des équations différentielles linéaires d'ordre 1.

Exemple 3 : Résoudre $\left\{\begin{array}{ll} x_1' & = 2x_1 + 3x_2 \\ x_2' & = 2x_2 \end{array}\right.$

Exemple 4 : Résoudre $\left\{\begin{array}{ll} x' & = 2x - y + te^{3t} \\ y' & = 4y + 1 \end{array}\right.$

e. Lien avec une équation linéaire d'ordre p

Considérons une équation différentielle linéaire d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$ à coefficients constants :

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + a_{n-2}y^{(n-2)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = b(t)\ .$$

où $a_0,\ a_1,\ \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{K}$ et $b\ :\ I \to \mathbb{K}$ est continue.

L'inconnue est $y\ :\ I \to \mathbb{K}$ une fonction $n-$fois dérivable sur I.

On peut se ramener à un système différentiel linéaire d'ordre 1 : $X' = AX + B(t)$

en posant $X=\begin{pmatrix} y \\ y' \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \end{pmatrix}$, puis $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \dots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{pmatrix}$ et $B(t)=\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b(t) \end{pmatrix}$.

Exemple 5 : Résoudre $y^{(3)}=2y''+y'-2y+t$.