I. ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES D'ORDRE 1

I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ et $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On considèrera des fonctions à valeurs dans $\mathbb{K}$.

1. Définitions

Une équation différentielle linéaire du premier ordre est de la forme $a(t)y' + b(t)y + c(t) = 0 \quad (E)$ avec a, b c sont des fonctions continues sur I. On cherche des solutions y sur un intervalle sur lequel a ne s'annule pas. Cela mène à considérer des équations normalisées.

- On étudie une **équation différentielle linéaire du premier ordre** de la forme

$$y' + a(t)y = b(t) \quad (E)$$

  où a, b sont des fonctions continues de I dans $\mathbb{K}$.
  Une **solution de** (E) est la donnée d'un intervalle J et d'une fonction $y : J \to \mathbb{K}$, dérivable sur J et telle que

$$\forall t \in J,\ y'(t) + a(t)y(t) = b(t)\ .$$

  On dit que y **est une solution sur** J **(à valeurs dans** $\mathbb{K}$**)**.
- On parle d'équation homogène si $b = 0$,
  l'équation homogène associée à (E) est $y' + a(t)y = 0 \quad (H)$.
- Dans le cas où les fonctions sont à valeurs dans $\mathbb{R}$, on appelle **courbe intégrale** la courbe représentative, dans le plan, d'une solution d'une équation différentielle d'ordre un.

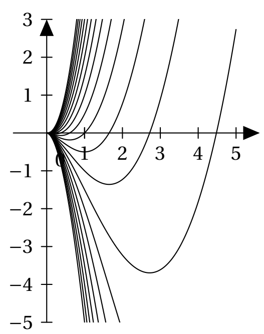
2. Problème de Cauchy

Soit (1) l'équation différentielle $y' + a(t)y = b(t)$ où a et b sont des fonctions continues sur I. Soit $(t_0, y_0) \in I \times \mathbb{K}$.
Résoudre le problème de Cauchy relatif à (1) et aux données initiales (t_0, y_0) consiste à chercher les solutions y de (1) vérifiant $y(t_0) = y_0$.

Proposition 1 *Théorème de Cauchy*

> Soit (1) l'équation différentielle $y' + a(t)y = b(t)$ où a, b sont deux fonctions continues sur I.
> Soit $(t_0, y_0) \in I \times \mathbb{K}$.
> Le problème de Cauchy relatif à (1) et aux données initiales (t_0, y_0) admet une unique solution φ.

Pour l'équation $y' + a(t)y = b(t)$, avec a et b à valeurs réelles, l'existence d'une solution au problème de Cauchy permet d'affirmer que, par tout point M de coordonnées $(t_0, y_0) \in I \times \mathbb{R}$ passe une courbe intégrale. L'unicité de la solution permet d'affirmer qu'une seule courbe intégrale passe par un point M donné, et donc que deux courbes intégrales ne se coupent pas.
Par exemple, pour l'équation $y' - \frac{2}{t}y = t$, on obtient les courbes ci-contre



3. Structure de l'ensemble des solutions

La **linéarité** est cruciale dans l'étude des équations car elle permet de connaître la structure de l'ensemble des solutions. On considère l'équation (E) $y' + a(t)y = b(t)$ et (H) $y' + a(t)y = 0$.

Proposition 2

> - L'ensemble $\mathscr{S}_0$ des solutions de l'équation homogène est un $\mathbb{K}$−espace vectoriel de dimension 1
> - Si il existe f_1 une solution de (E) alors l'ensemble des solutions de (E) est $\{f_1 + f,\ f \in \mathscr{S}_0\}$.

Autrement dit : si l'on connaît une solution f_1 de (E) et les solutions de l'équation homogène alors on connaît toutes les solutions, $\boxed{y \text{ est solution de } (E) \text{ si et seulement si } \exists\, f \in \mathscr{S}_0,\ y = f_1 + f}$.

Principe de superposition

Proposition 3

Soient $a,\ b,\ c_1,\ c_2$ fonctions continues sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$.
Si y_1 est solution de $y' + a(t)y = b_1(t)$ et y_2 solution de $y' + a(t)y = b_2(t)$, alors $y_1 + y_2$ est solution de $y' + a(t)y = (b_1 + b_2)(t)$.

4. Résolution

On considère une équation différentielle linéaire d'ordre 1 :

$$(E) \quad y' + a(t)y = b(t), \text{ où } a,\ b \text{ sont des fonctions continues sur I.}$$

a. *Résolution de l'équation homogène* : Soit (H) l'équation $y' + a(t)y = 0$.

Proposition 4

L'ensemble $\mathscr{S}_0$ des solutions de $(H)\ :\ y' + a(t)y = 0$ est $\left\{ \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{K} \\ t & \mapsto & \lambda e^{-A(t)} \end{array},\ \lambda \in \mathbb{K} \right\}$
où A est une primitive de a sur I.

b. *Recherche d'une solution particulière*

On note A une primitive de a sur I. On cherche une solution particulière, et on commencera toujours par tester des fonctions simples (constantes, polynomiales, qui s'inspire du second membre b, ...). Si la devinette échoue, on applique la méthode de variation de la constante en rédigeant correctement.

On considère y définie sur I par $y(t) = \lambda(t)e^{-A(t)}$ où λ est ici une fonction supposée dérivable.
On cherche alors une condition sur λ (en fait sur λ') pour que y soit une solution de (E).
λ n'est plus une constante, elle varie d'où le nom de la méthode....et $t \mapsto e^{-A(t)}$ est une solution de l'équation (H).
Lorsque l'on écrit, pour $t \in I$, $y'(t) + a(t)y(t) - b(t) = \ldots$ les termes en λ s'éliminent et on obtient $\lambda' = \ldots$ (mais il vaut mieux faire le calcul car celui-ci permet de vérifier que notre solution de (H) est la bonne !). On détermine λ (en primitivant) et on prend $y_1\ :\ t \mapsto \lambda(t)e^{-A(t)}$ pour solution particulière (ne pas oublier de multiplier la fonction λ trouvée par $e^{-A(t)}$).

c. *Solutions de* (E)

Puisque l'équation est linéaire, on obtient la solution générale de (E) en ajoutant une solution particulière et une solution générale de (H).

Proposition 5

L'ensemble des solutions de (E) est $\left\{ \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{K} \\ t & \mapsto & f_1(t) + \lambda e^{-A(t)} \end{array},\ \lambda \in \mathbb{K} \right\}$ où A est une primitive de a sur I et f_1 une solution de (E).

Exercice 1 *Sauf indication contraire, les fonctions cherchées sont à valeurs dans* $\mathbb{R}$

a. Résoudre $y' + 2y = x^2 - 2x + 3$

b. Résoudre $y' = ay + b$ où a **et** b **sont dans** $\mathbb{C}$ (y à valeurs dans $\mathbb{C}$).

c. Résoudre $y' - 2y = \cos(3t)$

d. Résoudre $(1+x)y' + y = 1 + \ln(1+x)$

II. Équations différentielles linéaires d'ordre 2

1. Définitions

- Une **équation différentielle linéaire du second ordre** est de la forme

$$y'' + a(t)y' + b(t)y = c(t) \quad (E)$$

où a, b, c sont des fonctions continues d'un intervalle I dans $\mathbb{K}$.
Une **solution de** (E) est la donnée d'un intervalle I et d'une fonction $y : I \to \mathbb{K}$, deux fois dérivable sur I et telle que

$$\forall t \in I,\ y''(t) + a(t)y'(t) + b(t)y = c(t)\ .$$

- On parle d'équation homogène si $c : t \mapsto 0$,
l'équation homogène associée à (E) est $y'' + a(t)y' + b(t)y = 0 \quad (H)$.

2. Problème de Cauchy

Soit (2) l'équation différentielle $y'' + a(t)y' + b(t)y = c(t)$ où a, b et c sont des fonctions continues sur I. Soit $(t_0, y_0, y_1) \in I \times \mathbb{K} \times \mathbb{K}$.
Résoudre le problème de Cauchy relatif à (2) et aux données initiales (t_0, y_0, y_1) consiste à chercher les solutions y de (2) vérifiant $y(t_0) = y_0$ et $y'(t_0) = y_1$.

Proposition 6 *Théorème de Cauchy*

Soit l'équation différentielle $y'' + a(t)y' + b(t)y = c(t)$ où a, b et c sont des fonctions continues sur I.
Soit $(t_0, y_0, y_1) \in I \times \mathbb{K} \times \mathbb{K}$.
Le problème de Cauchy relatif à (2) et aux conditions initiales (t_0, y_0, y_1) admet une unique solution φ, définie sur I.

Dans le cas où a et b sont à valeurs réelles et que l'on cherche des solutions y à valeurs réelles, l'existence d'une solution au problème de Cauchy permet d'affirmer que, par tout point M de coordonnées $(t_0, y_0) \in I \times \mathbb{R}$ passe une courbe intégrale dont la tangente en ce point a pour coefficient directeur y_1. L'unicité de la solution permet d'affirmer qu'une seule courbe intégrale ayant une tangente de coefficient directeur y_1 passe par ce point M donné.

3. Structure de l'ensemble des solutions

On considère l'équation (E) $y'' + a(t)y' + b(t)y = c(t)$ et (H) $y'' + a(t)y' + b(t)y = 0$.

Proposition 7

- L'ensemble $\mathcal{S}_0$ des solutions de l'équation homogène (H) est un $\mathbb{K}-$ev de dimension 2.
- Si il existe f_1 solution de (E) alors l'ensemble des solutions de (E) est $\{f_1 + f,\ f \in \mathcal{S}_0\}$.

dem : on fixe $t_0 \in I$ et grâce au théorème de Cauchy, on montre que l'application $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathcal{S}_0 & \mapsto & \mathbb{K}^2 \\ y & \to & (y(t_0), y'(t_0)) \end{array}$ est un isomorphisme de $\mathbb{K}-$espace vectoriel.

On cherchera donc pour résoudre (H) complètement **deux** fonctions solutions formant une famille **libre** dans l'espace des fonctions deux fois dérivables. Cela nous donnera une base de $\mathscr{S}_0$.
Le **principe de superposition** reste valable et sera souvent utilisé dans la recherche d'une solution particulière.

4. Cas des coefficients constants

Soient $a,\ b \in \mathbb{K}$. Soit $f\ :\ I \to \mathbb{K}$ une fonction continue. On considère l'équation différentielle linéaire à coefficients constants : $y'' + ay' + by = f(t) \quad (E)$
L'équation homogène est donc $y'' + ay' + by = 0 \quad (H)$.

On considère l'équation caractéristique : $\boxed{(E_c) \quad r^2 + ar + b = 0}$ d'inconnue $r \in \mathbb{K}$.
On obtient cette équation d'inconnue réelle en cherchant les solutions y (de l'équation différentielle) de la forme $y\ :\ t \mapsto e^{rt}$.

a. *Résolution de l'équation homogène*

Proposition 8 *Cas complexe*

- Si (E_c) admet deux solutions distinctes r_1 et r_2 alors l'ensemble des solutions de (H) est $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & \alpha e^{r_1 t} + \beta e^{r_2 t} \end{array},\ (\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2 \right\}$.
- Si (E_c) admet une unique solution r_0 alors l'ensemble des solutions de (H) est $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & (\alpha + \beta t) e^{r_0 t} \end{array},\ (\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2 \right\}$.

Proposition 9 *Cas réel*

- Si (E_c) admet deux solutions réelles distinctes r_1 et r_2 alors l'ensemble des solutions de (H) est $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \alpha e^{r_1 t} + \beta e^{r_2 t} \end{array},\ (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.
- Si (E_c) admet une unique solution r_0 alors l'ensemble des solutions de (H) est $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & (\alpha + \beta t) e^{r_0 t} \end{array},\ (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.
- Si (E_c) admet deux solutions complexes conjuguées $r + i\omega$ et $r - i\omega$ alors l'ensemble des solutions de (H) est $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & (\alpha \cos(\omega t) + \beta \sin(\omega t)) e^{rt} \end{array},\ (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.

b. *Recherche d'une solution particulière*

➢ Avec second membre exponentielle.
Soit $a,\ b \in \mathbb{K}$. Soit $A \in \mathbb{K}$ et $\gamma \in \mathbb{K}$. Soit (E) l'équation $y'' + ay' + by = Ae^{\gamma t}$.

Il existe une solution de (E) de la forme

$t \mapsto Be^{\gamma t}$ (avec $B \in \mathbb{K}$) si γ n'est pas racine de l'équation caractéristique (E_c),

$t \mapsto Bte^{\gamma t}$ (avec $B \in \mathbb{K}$) si γ est racine simple de l'équation caractéristique (E_c),

$t \mapsto Bt^2 e^{\gamma t}$ (avec $B \in \mathbb{K}$) si γ est racine double de l'équation caractéristique (E_c).

➢ Avec second membre cos ou sin : on se ramène au cas précédent en passant par l'exponentielle complexe.
Par exemple, pour trouver une solution particulière de $y'' + ay' + by = \cos(3t)$, on cherche une solution particulière y_p de $y'' + ay' + by = e^{3it}$ et la fonction $y_1 = \mathrm{Re}(y_p)$ est une solution particulière de notre équation (démontré par le principe de superposition).

c. *Conclusion*
L'équation est linéaire donc on obtient la solution générale de (E) en ajoutant une solution particulière et une solution générale de (H).

Exercice 2 *Sauf indication contraire, les fonctions cherchées sont à valeurs dans* $\mathbb{R}$

a. Résoudre $y'' - y = 0$.
b. Résoudre $y'' + y = 0$.
c. Résoudre $y'' - 4y' + 3y = 5\sin(2t)$.
d. Résoudre $y'' - 4y' + 3y = e^t$.
e. Résoudre $y'' - 2y' + y = te^t$.

5. Résolution dans le cas général

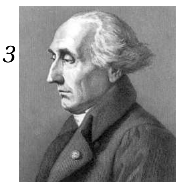
a. $\boxed{\text{Résolution de l'équation homogène } (H) : y'' + a(t)y' + b(t)y = 0}$

➢ *Si l'on connaît une base de* $\mathscr{S}_0$
Supposons que l'on trouve $y_1,\ y_2$ deux solutions de (H) formant une famille libre.
L'ensemble $\mathscr{S}_0$ est alors $\{\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2,\ (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{K}^2\}$.

Exemple 1 : Résoudre $(-t^2+1)y'' + 2ty' - 2y = 0$ en cherchant des solutions polynomiales.

➢ *Si l'on connaît une solution de* (H) *ne s'annulant pas sur* I : **méthode de Lagrange**.
Supposons que l'on trouve y_1 une solution de (H), qui ne s'annule pas sur I.
On cherche une deuxième solution y de (H) sous la forme $y = \lambda y_1$ avec λ une **fonction** deux fois dérivable sur I et non constante.
On calcule y' puis y'' et on travaille par équivalence : y est solution de (H) si et seulement si λ' est solution d'une équation linéaire d'ordre 1 sur I. On peut en déduire une fonction λ convenant. On conclut comme au point précédent (on verra que λ peut être choisie non constante, donc nos deux solutions de (H) ne sont pas proportionnelles).

Joseph-Louis Lagrange, 1736-1813



Exemple 2 : Résoudre $t^3y'' + ty' - y = 0$. La fonction $t \mapsto t$ est une solution évidente.

➢ *Avec un changement de variables*
Un changement de variable $x = \varphi(t)$, avec φ bijective, peut ramener (H) à une équation (H') à coefficients constants : on pose $z : x \mapsto y(\varphi^{-1}(x))$ et on exprime les dérivées de y en fonction des dérivées de z. On peut utiliser pour les calculs, pour $t \in I$, $y(t) = z(\varphi(t))$.

Exemple 3 : Résoudre $t^2y'' + 3ty' + y = 0$ d'inconnue $y :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$. On posera $x = \ln(t)$.

➢ *Avec un changement de fonction inconnue*

On transforme y en une autre fonction qui sera solution d'une équation plus simple, en posant par exemple $z = \dfrac{1}{y}$, ou encore $z\ :\ t \mapsto (1+t)y(t)$. Le changement de fonctions est donné, on exprime les dérivées de y en fonction de celles de z.

Exemple 4 : Résoudre $(t^2+t)y''+(3t+1)y'+y=0$ d'inconnue $y\ :]0,+\infty[\to\mathbb{R}$. On posera $z\ :\ t\mapsto(1+t)y(t)$.

b. $\boxed{\text{Résolution de l'équation complète } (E)\ :\ y''+a(t)y'+b(t)y=c(t)}$

On cherche une solution particulière et on conclut grâce au théorème de structure de l'ensemble des solutions d'une équation linéaire.

➢ *Recherche d'une solution évidente*

On commence par tester les fonctions constantes, les fonctions polynomiales, des fonctions inspirées du second membre.

➢ *Méthode de Lagrange*

On suppose que l'on connaît une solution y_0 de l'équation homogène et que y_0 ne s'annule pas sur l'intervalle de résolution I.

On cherche alors une solution y de (E) sous la forme $y=\lambda y_0$ où λ_0 est une fonction deux fois dérivable sur I. On calcule $y'=\lambda' y_0$ et $y''=\lambda'' y_0+2\lambda' y_0'+\lambda y_0''$.

On obtient que y est solution de (E) si et seulement si λ vérifie : $\lambda'' y_0+\lambda'(2y_0'+ay_0)=c$.

Les termes en λ s'éliminent car y_0 est une solution de l'équation homogène.

On a donc obtenu une équation différentielle linéaire d'ordre 1 en λ'. On trouve λ' puis on détermine λ en primitivant et, enfin, on déduit une solution y de (E).

Exemple 5 : Résoudre $t^3y''+ty'-y=\dfrac{1}{t}$.

Des solutions aux premiers exercices

Exercice 1 : Résoudre les équations différentielles suivantes sur les intervalles sur lesquels la fonction en facteur de y' ne s'annule pas.

➢ Résoudre $(1+x)y' + y = 1 + \ln(1+x)$

- *On résout sur* $I =]-1, +\infty[$.
- *Équation homogène* $y' + \dfrac{1}{1+x} y = 0$, *on cherche des solutions y définies sur* $]-1, +\infty[$.
Primitive de a, A : $t \mapsto \ln|1+x|$ *et* $e^{-A(x)} = e^{-\ln|1+x|} = \frac{1}{|1+x|}$. *Solutions* $\left\{x \mapsto \frac{\lambda}{1+x},\ \lambda \in \mathbb{R}\right\}$.
- *Solution particulière : variation de la constante, ou on "voit" que* $x \mapsto \ln(1+x)$ *convient !*
- *L'équation est linéaire, l'ensemble des solutions sur* $]-1, +\infty[$ *est* $\left\{ \begin{array}{ccc}]-1,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \ln(1+x) + \dfrac{\lambda}{1+x} \end{array},\ \lambda \in \mathbb{R} \right\}$.

➢ Résoudre $y' - 2y = \cos(3t)$

- *Équation homogène* $y' - 2y = 0$. *Solutions* $\{t \mapsto \lambda e^{2t},\ \lambda \in \mathbb{R}\}$.
- *Solution particulière : on résout* $y' - 2y = e^{3it}$ *en cherchant une solution sous la forme* $y_0\ :\ t \mapsto \alpha e^{3it}$. *On trouve* $\alpha = -\dfrac{2+3i}{13}$, *et on prend pour solution particulière* $y = Re(y_0)$.
- *L'équation est linéaire, l'ensemble des solutions est* $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \lambda e^{2t} - \dfrac{2}{13}\cos(3t) + \dfrac{3}{13}\sin(3t), \end{array},\ \lambda \in \mathbb{R} \right\}$.

Exercice 2 : Résoudre les équations différentielles suivantes.
Sauf indication contraire, les fonctions cherchées sont à valeurs dans $\mathbb{R}$

➢ Résoudre $y'' - 4y' + 3y = 5\sin(2t)$.

- *Équation caractéristique :* $r^2 - 4r + 3 = 0$, *deux racines réelles distinctes* 1 *et* 3.
- *Équation homogène :* $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \alpha e^t + \beta e^{3t} \end{array},\ (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.
- *solution particulière : on passe à* $y'' - 4y' + 3y = 5e^{2it}$. *solution cherchée sous la forme* $t \mapsto ae^{2it}$ *où* $a \in \mathbb{C}$ *(car* $2i$ *n'est pas une solution de* (E_c)*). On trouve* $t \mapsto \frac{-1+8i}{13} e^{2it}$. *On prend la partie imaginaire pour obtenir une solution particulière pour l'éq initiale* $t \mapsto \dfrac{-1}{13}\sin(2t) + \dfrac{8}{13}\cos(2t)$.
- *L'ensemble des solutions de l'équation est* $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \dfrac{8}{13}\cos(2t) - \dfrac{1}{13}\sin(2t) + \alpha e^t + \beta e^{3t} \end{array},\ (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.

➢ Résoudre $y'' - 4y' + 3y = e^t$.

- *Équation caractéristique :* $r^2 - 4r + 3 = 0$, *deux racines réelles distinctes* 1 *et* 3.
- *Équation homogène :* $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \alpha e^t + \beta e^{3t} \end{array},\ (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.
- *solution particulière cherchée sous la forme* $t \mapsto ate^t$ *où* $a \in \mathbb{R}$ *(car* 1 *est une racine simple de* (Ec)*, donc* $t \mapsto e^t$ *est déjà solution de l'équation homogène). On trouve* $t \mapsto -\frac{t}{2} e^t$.
- *L'ensemble des solutions de l'équation est* $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & -\frac{t}{2} e^t + \alpha e^t + \beta e^{3t} \end{array},\ (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.

➢ Résoudre $y'' - 2y' + y = te^t$.

- *Équation caractéristique :* $r^2 - 2r + 1 = 0$, *une racine double* 1.
- *Équation homogène :* $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & (\alpha + t\beta)e^t \end{array},\ (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.
- *solution particulière cherchée sous la forme* $t \mapsto at^3 + bt^2 e^t$ *où* $a \in \mathbb{R}$ *(car* 1 *est une racine double de* (Ec)*, donc on augmente de*

deux le degré et le terme $(ct+d)e^t$ *est absent car il correspond à une solution de l'équation homogène donc n'est pas utile). On trouve* $t \mapsto \frac{t^3}{6}e^t$.

- *L'ensemble des solutions de l'équation est* $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \dfrac{t^3}{6}e^t + (\alpha t + \beta)e^t \end{array}, (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.