I. Rappels sur les matrices

1. Opérations sur les matrices

Proposition 1 *Structure d'espace vectoriel*

L'ensemble $(M_{n,p}(\mathbb{K}),+,\cdot)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension np (isomorphe à $\mathbb{K}^{np}$).

La base canonique de $M_{n,p}(\mathbb{K})$ est la famille $(E_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}$ avec $E_{ij}=(a_{kl})_{\substack{1\leqslant k\leqslant n\\1\leqslant l\leqslant p}}$ et $a_{kl}=\begin{cases}1 \text{ si } k=i \text{ et } l=j\\ 0 \text{ sinon}\end{cases}$.

Définition 1 : *Produit de deux matrices*
Soient $A=(a_{ij})\in M_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B=(b_{jk})\in M_{p,q}(\mathbb{K})$.
La matrice **produit** de A et B est $AB=(c_{ik})\in M_{n,q}(\mathbb{K})$ avec $\forall i,k\in[\![1,n]\!]\times[\![1,q]\!],\ c_{ik}=\sum_{j=1}^{p}a_{ij}b_{jk}$.

Remarque 1 :

➢ L'espace $M_{n,p}(\mathbb{K})$ est donc muni d'un produit par un scalaire, d'une somme et d'un produit. On note $M_n(\mathbb{K})$ l'espace des matrices carrées (n lignes et n colonnes).
➢ On note I_p la matrice identité de $M_p(\mathbb{K})$: les coefficients diagonaux valent 1 et les autres sont nuls.
On a alors $\forall A\in M_{n,p}(\mathbb{K}),\ A\times I_p=A$ et $\forall B\in M_{p,q}(\mathbb{K}),\ I_p\times B=B$.
➢ On retiendra que le produit de matrices n'est pas commutatif !
➢ Et surtout que $AB=0$ n'entraîne pas nécessairement A ou B nulle.

Proposition 2

Soit $M\in M_{n,p}(\mathbb{K})$. Si pour tout $X\in M_{p,1}(\mathbb{K})$, $MX=0$ alors $M=0$.

Définition 2 : *Transposée*
Soit $A=(a_{ij})\in M_{n,p}(\mathbb{K})$. On appelle transposée de A, et on note A^T la matrice de $M_{p,n}(\mathbb{K})$ définie par $(\alpha_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant p\\1\leqslant j\leqslant n}}$ où $\forall(i,j)\in[\![1,p]\!]\times[\![1,n]\!],\ \alpha_{ij}=a_{ji}$.

Produit par blocs

Considérons deux matrices $A\in M_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B\in M_{p,q}(\mathbb{K})$ qui se décomposent par blocs (avec $n=n_1+n_2$, $p=p_1+p_2$, $q=q_1+q_2$ et $A_{ij}\in M_{n_i,p_j}(\mathbb{K})$, $B_{ij}\in M_{p_i,q_j}(\mathbb{K})$). Le produit AB peut alors se calculer par blocs :

$$AB=\left(\begin{array}{c|c}A_{11} & A_{12}\\ \hline A_{21} & A_{22}\end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c}B_{11} & B_{12}\\ \hline B_{21} & B_{22}\end{array}\right)=\left(\begin{array}{c|c}A_{11}B_{11}+A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12}+A_{12}B_{22}\\ \hline A_{21}B_{11}+A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12}+A_{22}B_{22}\end{array}\right)$$

Proposition 3

- $\forall A\in M_{n,p}(\mathbb{K}),\ (A^T)^T=A$.
- L'application $\begin{array}{ccc}M_{n,p}(\mathbb{K}) & \to & M_{p,n}(\mathbb{K})\\ A & \mapsto & A^T\end{array}$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.
- Soient $A\in M_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B\in M_{p,q}(\mathbb{K})$, on transpose $(AB)^T=B^T\times A^T$.

2. Ensemble des matrices carrées $M_n(\mathbb{K})$

On appelle **matrice carrée d'ordre** n toute matrice à n lignes et n colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$.
On note $M_n(\mathbb{K})$ l'ensemble de ces matrices, c'est un anneau muni de la somme et du produit.

Itérés : On définit par récurrence, les **itérés** d'un élément $A \in M_n(\mathbb{K})$:
$A^0 = I_n$ et $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ A^k = A^{k-1} \times A = A \times A^{k-1}$.

Formule du binôme de Newton : On démontre par récurrence,

Soient $A,\ B \in M_n(\mathbb{K})$ tels que $AB = BA$, on a $\forall p \in \mathbb{N},\ (A+B)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} A^k B^{p-k}$.

Matrices inversibles

Définition 3 : $A \in M_n(\mathbb{K})$ est inversible si et seulement si il existe $B \in M_n(\mathbb{K})$ telle que $AB = BA = I_n$.
La matrice B est alors **l'inverse** de A et elle est notée A^{-1}.
On note $GL_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices inversibles de $M_n(\mathbb{K})$.

Proposition 4

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. On note $(C_1, \dots, C_n)$ ses vecteurs colonnes (vus comme des éléments de $\mathbb{K}^n$).

- Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension n muni d'une base $\mathscr{B}$.
  Pour $f \in L(E)$ tel que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = A$, A est inversible si et seulement si f est bijective.
- A est inversible si et seulement si $\forall X \in M_{n,1}(\mathbb{K}) \quad (AX = 0 \implies X = 0)$.
- A est inversible si et seulement si, pour tout $Y \in M_{n,1}(\mathbb{K})$, le système $Y = AX$ (d'inconnue $X \in M_{n,1}(\mathbb{K})$) admet une unique solution.
- A est inversible si et seulement si $\mathrm{rg}(A) = n$.
- A inversible $\iff (C_1, \dots, C_n)$ est une base de $\mathbb{K}^n$.
  $\iff (C_1, \dots, C_n)$ est une famille libre de $\mathbb{K}^n$
  $\iff (C_1, \dots, C_n)$ est une famille génératrice de $\mathbb{K}^n$
- A est inversible si et seulement si $A \underset{L}{\sim} I_n$.

Remarque 2 : Soient A et B dans $M_n(\mathbb{K})$. Si $AB = I_n$ alors A et B sont inversibles et inverses l'une de l'autre.

Proposition 5

Soient A et B dans $GL_n(\mathbb{K})$. AB est inversible et $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
La matrice A^T est dans $GL_n(\mathbb{K})$ et $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

II. Matrices et applications linéaires

1. Matrice d'une famille de vecteurs dans une base

Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension n, muni d'une base $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$. On considère une famille $\mathscr{F} = (u_1, u_2, \dots, u_p)$ de p vecteurs de E.

La matrice de la famille $\mathscr{F} = (u_1, u_2, \dots, u_p)$ **dans la base** $\mathscr{B}$ est une matrice de p colonnes et n lignes, formée
en inscrivant en colonne j
les coordonnées de u_j dans la base $\mathscr{B}$. Elle se note $Mat_{\mathscr{B}}\mathscr{F}$ ou $Mat_{\mathscr{B}}(u_1, \dots, u_p)$, et elle appartient à $M_{n,p}(\mathbb{K})$.

2. Matrice d'une application linéaire dans des bases

Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension p, muni d'une base $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_p)$, et F un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension n, muni d'une base $\mathscr{C}$. Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$.
La matrice de f **dans les bases** $\mathscr{B}$ **et** $\mathscr{C}$ est la matrice de $M_{n,p}(\mathbb{K})$ dont les coefficients sont $(a_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$ où $\forall j \in [\![1, p]\!],\ f(e_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\varepsilon_i$.

Définition 4 : ✰
La matrice de f **dans les bases** $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_p)$ **et** $\mathscr{C}$, notée $\text{Mat}_{\mathscr{C}}^{\mathscr{B}}(f)$ est une matrice de $M_{n,p}(\mathbb{K})$, formée
en inscrivant dans la colonne j
les **coordonnées** du vecteur $f(e_j)$ dans la base $\mathscr{C}$.

Remarque 3 :

➢ Pour former la matrice d'une application linéaire f, on commence par
- ➙ identifier la base de départ $\mathscr{B}$
- ➙ calculer $f(e_j)$ pour chaque e_j de $\mathscr{B}$
- ➙ chercher les coordonnées de $f(e_j)$ dans la base $\mathscr{C}$ et les inscrire en colonne

➢ La matrice d'une application linéaire dépend donc des bases choisies. Elle est notée dans ce cours $\text{Mat}_{\mathscr{C}}^{\mathscr{B}}(f)$, remarquez que la notation prend en compte les bases.
➢ Et on peut noter que $\text{Mat}_{\mathscr{C}}^{\mathscr{B}}(f) = \text{Mat}_{\mathscr{C}}(f(e_1), \dots, f(e_p))$ qui est la matrice de la famille $f(\mathscr{B})$ dans la base $\mathscr{C}$.

Interprétation du produit matriciel

Soient E muni d'une base $\mathscr{B}$, F muni d'une base $\mathscr{C}$ et G muni d'une base $\mathscr{D}$.
Matrice - vecteur colonne

La relation vectorielle $y = f(x)$ avec $x \in E$ et $y \in F$ se traduit matriciellement par

$$Mat_{\mathscr{C}}(y) = Mat_{\mathscr{C}}^{\mathscr{B}}(f)Mat_{\mathscr{B}}(x) \ .$$

Matrice - Matrice

Si $f \in L(E, F)$ de matrice $A = \text{Mat}_{\mathscr{C}}^{\mathscr{B}}(f)$ et $g \in L(F, G)$ de matrice $B = \text{Mat}_{\mathscr{D}}^{\mathscr{C}}(g)$, alors BA est la matrice de $g \circ f$ dans les bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{D}$:

$$\text{Mat}_{\mathscr{D}}^{\mathscr{B}}(g \circ f) = \text{Mat}_{\mathscr{D}}^{\mathscr{C}}(g) \times \text{Mat}_{\mathscr{C}}^{\mathscr{B}}(f) \ .$$

démo : Soit $x \in E$ et $X = \text{Mat}_{\mathscr{B}}(x)$, on a $\text{Mat}_{\mathscr{D}}(g \circ f(x)) = \text{Mat}_{\mathscr{D}}^{\mathscr{B}}(g \circ f)X$ et

$$\begin{aligned} \text{Mat}_{\mathscr{D}}(g \circ f(x)) &= \text{Mat}_{\mathscr{D}}^{\mathscr{C}}(g) \times \text{Mat}_{\mathscr{C}}(f(x)), \\ &= \text{Mat}_{\mathscr{D}}^{\mathscr{C}}(g) \times \text{Mat}_{\mathscr{C}}^{\mathscr{B}}(f) \times \text{Mat}_{\mathscr{B}}(x). \end{aligned}$$

Donc $\forall X \in M_{n,1}(\mathbb{K})$, $\text{Mat}_{\mathscr{D}}^{\mathscr{B}}(g \circ f)X = \text{Mat}_{\mathscr{D}}^{\mathscr{C}}(g) \times \text{Mat}_{\mathscr{C}}^{\mathscr{B}}(f)\ X$, et cela prouve le résultat (cf lemme).

Remarque 4 :

➢ **Pour un endomorphisme** $f \in \mathscr{L}(E)$, on définit la matrice de f dans une base $\mathscr{B}$ de E comme ci-dessus en prenant la même base au départ et à l'arrivée. On la note $\text{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$: c'est une matrice carrée de taille $p = \dim E$ et ses colonnes contiennent les coordonnées des vecteurs $f(e_j)$ dans la base $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_p)$.

➢ **Exemple fondamental** : La matrice de l'application identité de E, espace de dimension p, dans une base $\mathscr{B}$, est $Mat_{\mathscr{B}}(Id_E) = I_p$. En revanche, si on prend deux bases différentes de E, la matrice obtenue dans ces bases n'est pas l'identité.

Proposition 6

Soient E et F deux $\mathbb{K}-ev$ de dimensions finies, munis des bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$.
L'application $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathscr{L}(E,F) & \to & M_{n,p}(\mathbb{K}) \\ f & \mapsto & \text{Mat}_{\mathscr{C}}^{\mathscr{B}}(f) \end{array}$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

Remarque 5 :

➢ La propriété précédente signifie que, pour f, g dans $L(E,F)$ et λ, μ dans $\mathbb{R}$,
on a $\text{Mat}_{\mathscr{C}}^{\mathscr{B}}(\lambda f + \mu g) = \lambda \text{Mat}_{\mathscr{C}}^{\mathscr{B}}(f) + \mu \text{Mat}_{\mathscr{C}}^{\mathscr{B}}(g)$.

➢ $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathscr{L}(E) & \to & M_n(\mathbb{K}) \\ f & \mapsto & \text{Mat}_{\mathscr{B}}(f) \end{array}$ induit un isomorphisme de groupes de $(GL(E), \circ)$ dans $(GL_n(\mathbb{K}), \times)$.

Pour tout $f \in GL(E)$, en notant $A = \text{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$, on a $A^{-1} = \text{Mat}_{\mathscr{B}}(f^{-1})$.

Application linéaire canoniquement associée à une matrice

Définition 5 : ✰
Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. L'application linéaire f canoniquement associée à A est l'application linéaire de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^n$ dont la matrice dans les bases canoniques est A.

3. Changements de bases

Matrice de passage

Soit E un espace de dimension n, soient $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ et $\mathscr{B}' = (e'_1, \dots, e'_n)$ deux bases de E.

Définition 6 : ✰
On appelle matrice de passage de la base $\mathscr{B}$ (ancienne) à la base $\mathscr{B}'$ (nouvelle), et on note $P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}$ la matrice de $M_n(\mathbb{K})$ de la famille $\mathscr{B}'$ dans la base $\mathscr{B}$.

On trouve beaucoup de notations pour cette matrice : $P(\mathscr{B}, \mathscr{B}')$ ou $P_{\mathscr{B} \to \mathscr{B}'}$, ... ou tout simplement P. Celle-ci ne doit pas vous perturber et pour cela il faut être sûr de la définition de la matrice que l'on appelle matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$ ...
Cette matrice est donc formée en inscrivant les coordonnées des vecteurs e'_j dans la base $\mathscr{B}$, en colonnes. C'est donc $P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'} = \text{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}') = \text{Mat}_{\mathscr{B}}(e'_1, \dots, e'_n)$. On a aussi $P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'} = \text{Mat}_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}(\text{Id}_E)$.

Proposition 7

Une matrice de passage est une matrice inversible, et l'inverse de la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$ est la matrice de passage de $\mathscr{B}'$ à $\mathscr{B}$.
Autrement dit $\left(P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}\right)^{-1} = P_{\mathscr{B}'}^{\mathscr{B}}$.

démo : Posons $P = P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}$ et $Q = P_{\mathscr{B}'}^{\mathscr{B}}$.
On forme le produit en considérant P et Q comme la matrice de l'identité dans des bases bien choisies :

$PQ = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}(\mathrm{Id}_E) \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}^{\mathscr{B}}(\mathrm{Id}_E) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}}(\mathrm{Id}_E) = I_n$. Et voilà !

Remarque 6 : Une matrice de passage est inversible et toute matrice inversible peut-être interprétée comme une matrice de passage.

Par exemple, la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible.

On peut l'interpréter comme $P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}$ avec $\mathscr{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et $\mathscr{B}' = ((1,-1),(1,1))$.

Effet sur les coordonnées d'un vecteur

Proposition 8 ✰

Soit E un $\mathbb{K}-$ev muni de deux bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$. Soit $x \in E$, on note $X = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x)$ (vecteur des coordonnées dans $\mathscr{B}$), et $X' = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(x)$ (vecteur des coordonnées dans $\mathscr{B}'$) et P la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$. On a alors $X = PX'$.

démo

En général, on souhaite obtenir X' en fonction de X. Il faudra alors utiliser $\boxed{X' = P^{-1}X}$ et donc calculer P^{-1}.

Effet sur les matrices d'une application linéaire

Proposition 9 ✰

Soit $f \in L(E,F)$ avec $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ deux bases de E et $\mathscr{C}$, $\mathscr{C}'$ bases de F. On note $P = P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}$ et $Q = P_{\mathscr{C}}^{\mathscr{C}'}$ les matrices de passages, et $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}^{\mathscr{B}}(f)$ et $A' = \mathrm{Mat}_{\mathscr{C}'}^{\mathscr{B}'}(f)$ les matrices de f.
On a alors $A' = Q^{-1}AP$.

démo

Dans le cas des endomorphismes, on effectue le même changement de base au départ et à l'arrivée. On a donc, avec $\boxed{A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) \text{ et } A' = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f),\ A' = P^{-1}AP}$.

4. Rang d'une matrice

Nous avons déjà parlé du rang

- d'une application linéaire f : c'est la dimension de l'image de f.
- d'une famille de vecteurs $(u_1,\dots,u_p)$: c'est la dimension de $\mathrm{Vect}(u_1,\dots,u_p)$.

Ces deux notions sont liées par le fait que, pour $f \in L(E,F)$, et pour $(e_1,\dots,e_p)$ une base de E, l'image de f est $\mathrm{Im} f = \mathrm{Vect}(f(e_1),\dots,f(e_p))$. Cela est valable pour toute base $(e_1,\dots,e_p)$ de E, et cela ne dépend pas de la base dans laquelle on écrit les vecteurs à l'arrivée (dans F).
En notant $C_1, \dots, C_p$ les vecteurs colonnes de la matrice de f dans les base $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$ de E et F, on constate que le rang de f est aussi le rang de la famille $(C_1,\dots,C_p)$ vecteurs de $\mathbb{R}^n$.

Définition 7 : Le rang d'une matrice de $M_{n,p}(\mathbb{K})$ est le rang de la famille de ses vecteurs colonnes.

Remarque 7 :

- Si A représente une application linéaire $f \in L(E,F)$ dans des bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$, alors le rang de A est le rang de f (i.e. la dimension de $\mathrm{Im}(f)$). C'est aussi le rang du système correspondant à A.
- Pour $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$, $\mathrm{rg}(A) \leqslant \min(n,p)$.

- Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. A est inversible si et seulement si son rang est n.

Proposition 10

Soit $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$.

a. Si $B \in M_p(\mathbb{K})$ est inversible, alors le rang de AB est égal au rang de A.

b. Si $B \in M_n(\mathbb{K})$ est inversible, alors le rang de BA est égal au rang de A.

Proposition 11 *(Admis)*

Soit $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$. Le rang de A^T est égal au rang de A.

Définition 8 : Soit $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$, on définit

- le **noyau de** A : $\ker A = \{X \in M_{p,1}(\mathbb{K}) \ / \ AX = 0\}$, qui est un sous-espace vectoriel de $M_{p,1}(\mathbb{K})$,
- l'**image de** A : $\mathrm{Im}A = \{AX,\ X \in M_{p,1}(\mathbb{K})\}$, sous-espace de $M_{n,1}(\mathbb{K})$.

Proposition 12 ☆ *Théorème du rang pour les matrices*

Soit $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$. On a alors $\dim\ker A + \dim \mathrm{Im}A = p$.

démo : découle directement du théorème du rang pour les applications linéaires. On l'applique ici à l'application linéaire canoniquement associée à A.

5. Utilisation des matrices inversibles

Proposition 13 *Caractérisation des bases*

Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension n muni d'une base $\mathscr{B}$.
Une famille $(u_1,\dots,u_n)$ de vecteurs de E est une base de E si et seulement si $Mat_{\mathscr{B}}(u_1,\dots,u_n)$ est une matrice inversible.

Proposition 14 *Caractérisation des isomorphismes*

- Soient E et F deux $\mathbb{K}-$espaces vectoriels de dimensions finies. Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$.
  f est un isomorphisme si et seulement si sa matrice dans des bases de E et F est inversible.
- Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension n. Soit $f \in \mathscr{L}(E)$.
  f est bijective si et seulement si sa matrice dans une base de E est inversible.

III. Trace d'une matrice carrée

1. Matrices semblables

Définition 9 : ☆
Soient A et B dans $M_n(\mathbb{K})$. Si il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que $B = P^{-1}AP$, on dit que A et B sont **semblables**.

Deux matrices représentant le même endomorphisme dans des bases différentes sont semblables.
Réciproquement, deux matrices semblables représentent le même endomorphisme dans des bases différentes.

2. Trace

Définition 10 : ✰
Soit $A=(a_{ij})\in M_n(\mathbb{K})$. La trace de A est le scalaire noté $\mathrm{tr}(A)$, défini par $\mathrm{tr}(A)=\sum_{i=1}^{n} a_{ii}$.

La trace d'un matrice carrée est la somme de ses coefficients diagonaux.

Proposition 15 ✰

- $\forall A,B\in M_n(\mathbb{K}),\ \mathrm{tr}(A+B)=\mathrm{tr}(A)+\mathrm{tr}(B)$.
- $\forall A\in M_n(\mathbb{K}),\ \forall\lambda\in\mathbb{K},\ \mathrm{tr}(\lambda A)=\lambda\mathrm{tr}(A)$.
- $\forall A,B\in M_n(\mathbb{K}),\ \mathrm{tr}(AB)=\mathrm{tr}(BA)$.

démo

Les deux premiers points expriment le fait que $\mathrm{tr}:\begin{array}{ccc} M_n(\mathbb{K}) & \to & \mathbb{K} \\ A & \mapsto & \mathrm{tr}(A)\end{array}$ est une forme linéaire.

Proposition 16

Deux matrices semblables ont la même trace.

démo

Remarque 8 :

- On appelle trace d'un endomorphisme la trace de n'importe quelle matrice le représentant (elles sont toutes semblables).
- Soit p un projecteur de E. On a $\mathrm{tr}(p)=\mathrm{rg}(p)$ (exo).

IV. Déterminant d'une matrice carrée

1. Définition

Définition 11 : ✰ *Définition du déterminant dans* $M_n(\mathbb{K})$
Il existe une unique application de $M_n(\mathbb{K})$ dans $\mathbb{K}$ appelé déterminant, telle que

(1) le déterminant est linéaire par rapport à chacune des colonnes (de la matrice $A\in M_n(\mathbb{K})$),

(2) l'échange de deux colonnes a pour effet de multiplier le déterminant par -1,

(3) le déterminant de la matrice I_n vaut 1.

Explications et notations : soit $A=(a_{ij})\in M_n(\mathbb{K})$, on définit $\det:\begin{array}{ccc} M_n(\mathbb{K}) & \to & \mathbb{K} \\ A & \mapsto & \det A\end{array}$.

Le déterminant est aussi noté $\det A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}\end{vmatrix}$.

On note $(C_1,\dots,C_n)$ les colonnes de A (ce sont des vecteurs-colonnes de $M_{n,1}(\mathbb{K})$ que l'on peut identifier à des vecteurs de $\mathbb{K}^n$). $\boxed{\text{On note alors } \det A=\det(C_1,\dots,C_n)}$.

Les propriétés du déterminant concernent les colonnes.

(1) Pour toutes colonnes $C_1,\dots,C_n$ et C de $M_{n,1}(\mathbb{K})$, pour tout $\lambda\in\mathbb{K}$, on a

$\forall k \in [\![1,n]\!]$, $\det(C_1,\dots,C_k+C,\dots,C_n) = \det(C_1,\dots,C_k,\dots,C_n) + \det(C_1,\dots,C,\dots,C_n)$,

$\forall k \in [\![1,n]\!]$, $\det(C_1,\dots,\lambda C_k,\dots,C_n) = \lambda \det(C_1,\dots,C_k,\dots,C_n)$.

Le déterminant est dit n-linéaire : il est linéaire par rapport à chacune de ses colonnes, les autres étant momentanément fixées. Le déterminant n'est pas linéaire.

Proposition 17

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$, soit $\lambda \in \mathbb{K}$, on a $\det(\lambda A) = \lambda^n \det A$.

(2) Pour toutes colonnes $C_1,\dots,C_n$ et pour tout $(k,l) \in [\![1,n]\!]^2$ tel que $k \neq l$,
on a $\det(C_1,\dots,C_k,\dots,C_l,\dots,C_n) = -\det(C_1,\dots,C_l,\dots,C_k,\dots,C_n)$.

Exemple 1

a. *Le déterminant dans $M_2(\mathbb{R})$*
Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. On définit $\det A = ad - bc$.

Vérifier que le déterminant ainsi défini possède les propriétés de la définition 1.
Montrer que $\det(A^T) = \det A$.

b. *Le déterminant dans $M_3(\mathbb{R})$*
Soit $A = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix}$. On définit $\det A = x_1 \begin{vmatrix} y_2 & y_3 \\ z_2 & z_3 \end{vmatrix} - x_2 \begin{vmatrix} y_1 & y_3 \\ z_1 & z_3 \end{vmatrix} + x_3 \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix}$.
Vérifier que le déterminant ainsi défini possède les propriétés de la définition 1.
Montrer que $\det(A^T) = \det A$.

Proposition 18

a. Le déterminant d'une matrice ayant deux colonnes égales est nul.
b. Le déterminant d'une matrice ayant une colonne nulle est nul.
c. Le déterminant d'une matrice dont l'une des colonnes est Combinaison Linéaire des autres colonnes est nul.

démo

a. On utilise l'échange de deux colonnes (celles identiques ici).
b. On utilise la linéarité par rapport à une colonne.
c. On écrit $C_j = \sum_{k \neq j} \lambda_k C_k$ et on utilise le premier point.

Proposition 19 (*admis*)

Pour toute matrice $A \in M_n(\mathbb{K})$, $\det(A^T) = \det A$

Cela implique que le déterminant de A est aussi le déterminant de la famille de ses lignes dans la base canonique de $\mathbb{K}^n$. Si on note $C_1,\dots,C_n$ les colonnes de A et $L_1,\dots,L_n$ les lignes de A, on a donc $\det A = \det(C_1,\dots,C_n) = \det(L_1,\dots,L_n)$.

2. Calcul de déterminants

a. Effet des opérations élémentaires

On appelle opération élémentaire sur un déterminant les mêmes opérations élémentaires que celle définies sur les matrices (ou les systèmes) : échange de deux colonnes, ou de deux lignes, multiplication d'une colonne (ou d'une ligne) par un scalaire non nul, ajout à une colonne (ou une ligne) d'une CL des autres colonnes (ou lignes).
Ces opérations ont un effet simple sur le déterminant.

Opération sur les lignes	Effet sur le déterminant	Opération sur les colonnes
$L_i \leftarrow L_i + \alpha L_j$	$\det A = \det A'$	$C_i \leftarrow C_i + \alpha C_j,\ \alpha \in \mathbb{K}$
$L_i \leftrightarrow L_j$	$\det A = -\det A'$	$C_i \leftrightarrow C_j$
$L_i \leftarrow \alpha L_i,\ \alpha \neq 0$	$\det A = \dfrac{1}{\alpha} \det A'$	$C_i \leftarrow \alpha C_i,\ \alpha \in \mathbb{K}^*$

Proposition 20 ✰

Soit A une matrice triangulaire supérieure. Le déterminant de A est égal au produit de ses coefficients diagonaux.

démo : Nous montrons, en travaillant avec les opérations sur les lignes pour obtenir un déterminant d'une matrice échelonnée réduite, que

- Si l'un des coefficients diagonaux de A est nul alors $\det A = 0$.
- Si tous les coefficients diagonaux de A sont non nuls alors $\det A = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$.

En pratique : on utilise la méthode du pivot pour transformer le déterminant et se ramener à calculer le déterminant d'une matrice triangulaire.

b. Développement suivant une ligne ou une colonne

Théorème 1 ✰ (*admis*)
Soit $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{K})$. Soit $j \in [\![1, n]\!]$.
Le développement de $\det A$ par rapport à la colonne j est

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j}\, a_{ij}\, \det A_{ij}\,,$$

où $A_{ij} \in M_{n-1}(\mathbb{K})$ est la matrice déduite de A en supprimant la ligne i et la colonne j.

Remarque 9 :
Vocabulaire : on appelle $b_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij}$ le **cofacteur de** a_{ij} dans la matrice A et $\det(A_{ij})$ s'appelle un mineur.

Puisque le déterminant est le même pour la matrice transposée, on peut aussi développer suivant une ligne :

Proposition 21

Soit $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{K})$. Soit $i \in [\![1, n]\!]$.
Le développement de $\det A$ par rapport à la ligne i est

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j}\ a_{ij}\ \det A_{ij}$$

où $A_{ij} \in M_{n-1}(\mathbb{K})$ est la matrice déduite de A en supprimant la ligne i et la colonne j.

3. Propriétés et utilisations du déterminant

Proposition 22 ✰ *Déterminant d'un produit (admis)*

Pour toutes matrices $A,\ B \in M_n(\mathbb{K})$, on a $\det(AB) = \det A\ \det B$.
Pour toute matrice $A \in M_n(\mathbb{K})$, $\forall k \in \mathbb{N}$, $\det(A^k) = (\det A)^k$.

Proposition 23 ✰

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$, A est inversible si et seulement si $\det A \neq 0$.

démo : Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$, A est équivalente par ligne à une matrice échelonnée réduite A_1 . Cette matrice est triangulaire. Les déterminants de ces deux matrices ne sont pas égaux mais proportionnels (les opérations élémentaires peuvent amener des changements de signes, et des multiplications par un scalaire non nuls) : $\det A_1 = \alpha \det A$ avec $\alpha \in \mathbb{K}^*$.
Puisque A_1 est triangulaire, A_1 est inversible si et seulement si ses coefficients diagonaux sont tous non nuls. Or $\det A_1$ est égal au produit de ces coefficients diagonaux. Donc A_1 est inversible si et seulement si $\det A_1 \neq 0$.
Mais on sait aussi que A_1 est inversible si et seulement si A est inversible.
On en conclut que A est inversible si et seulement si $\det A \neq 0$.

Proposition 24

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ inversible. On a $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det A}$.

Proposition 25

Soit A et B deux matrices de $M_n(\mathbb{K})$.
Si A et B sont des matrices semblables alors $\det B = \det A$.

démo : A et B sont semblables donc il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que $B = P^{-1}AP$.
On a $\det B = \det(P^{-1}AP) = \det(P^{-1}) \det A \det P = \det A \times \det(P^{-1}P) = \det A$.

4. Déterminant d'une famille de vecteurs dans une base

Définition 12 : ✰
Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension n. Soit $\mathscr{B}$ une base de E.
Soit $(u_1, \dots, u_n)$ une famille de n vecteurs de E. On pose $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u_1, \dots, u_n) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
On appelle **déterminant dans la base** $\mathscr{B}$ de $(u_1, \dots, u_n)$ le déterminant de la matrice A, et on note ce déterminant $\det_{\mathscr{B}}(u_1, \dots, u_n)$.

⚠Attention, ce déterminant dépend de la base choisie pour le calcul.

Proposition 26 ✰ *Caractérisation des bases par le déterminant*

Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension n. Soit $\mathscr{B}$ une base de E.
Soit $(u_1,\dots,u_n)$ une famille de n vecteurs de E.
La famille $(u_1,\dots,u_n)$ est une base si et seulement si $\det_{\mathscr{B}}(u_1,\dots,u_n)\neq 0$

démo : $(u_1,\dots,u_n)$ est une base si et seulement si $A=\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u_1,\dots,u_n)$est inversible, donc si et seulement si $\det A = \det_{\mathscr{B}}(u_1,\dots,u_n)$ est non nul.

Remarque 10 :

- Cette propriété est valable quelle que soit la base $\mathscr{B}$ choisie : le déterminant d'une famille de vecteurs dépend de la base dans laquelle on l'exprime mais le fait que ce déterminant soit nul ne dépend pas du choix de la base.
- Notez bien qu'il faut exactement n vecteurs dans une famille de vecteurs d'un espace de dimension n pour calculer un déterminant : c'est ce qui assure que la matrice $A=\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u_1,\dots,u_n)$ est bien une matrice carrée !

Propriétés du déterminant dans une base d'une famille de vecteurs

Proposition 27

- Le déterminant d'une famille de vecteurs dont deux d'entre eux sont égaux est nul.
- Le déterminant d'une famille de vecteurs contenant le vecteur nul est nul.
- Le déterminant d'une famille liée est nul.

Considérons le déterminant dans une base comme une application :

$$\det_{\mathscr{B}} : \begin{array}{ccc} E^n & \to & \mathbb{K} \\ (u_1,\dots,u_n) & \mapsto & \det_{\mathscr{B}}(u_1,\dots,u_n) \end{array}.$$

Proposition 28

- Le déterminant dans une base $\mathscr{B}$ est linéaire par rapport à chacune de ses variables.
- Le déterminant d'une famille est transformé en son opposé si l'on échange deux vecteurs.
- On ne change pas le déterminant d'une famille de vecteurs en ajoutant à l'un des vecteurs une C.L. des autres.

Traduction des deux premières propriétés :

- Multi-linéarité : $\forall (u_1,\dots,u_n)\in E^n,\ \forall u\in E, \forall\lambda\in\mathbb{K}$, on a
  pour tout $k\in [\![1,n]\!]$, $\det_{\mathscr{B}}(u_1,\dots,u_k+u,\dots u_n)=\det_{\mathscr{B}}(u_1,\dots,u_k,\dots u_n)+\det_{\mathscr{B}}(u_1,\dots,u,\dots u_n)$,
  $\det_{\mathscr{B}}(u_1,\dots,\lambda u_k,\dots u_n)=\lambda\ \det_{\mathscr{B}}(u_1,\dots,u_k,\dots u_n)$.
- Echange de deux vecteurs : pour tout $(u_1,\dots,u_n)\in E^n$, $\forall (i,j)\in[\![1,n]\!],\ i\neq j$,
  $\det_{\mathscr{B}}(u_1,\dots,u_j,\dots,u_i,\dots u_n)=-\det_{\mathscr{B}}(u_1,\dots,u_i,\dots,u_j,\dots,u_n)$.

On dit que l'application $\det_{\mathscr{B}}$ *est une forme multilinéaire alternée.*

5. Déterminant d'un endomorphisme

Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension n. Soit $\mathscr{B}_0$ et $\mathscr{B}_1$ deux bases de E.
Soit $f \in \mathscr{L}(E)$. On note $A_0 = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_0}(f)$ et $A_1 = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_1}(f)$.
Ces deux matrices sont semblables : $A_1 = P^{-1}A_0P$ avec P la matrice de passage de $\mathscr{B}_0$ à $\mathscr{B}_1$. Leur déterminants sont donc égaux : $\det A_0 = \det A_1$.

Définition 13 : ✰
Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension n. Soit $\mathscr{B}$ une base de E. Soit $f \in \mathscr{L}(E)$.
On appelle **déterminant de** f, et on note $\det f$, le déterminant de la matrice $A \in M_n(\mathbb{K})$ représentant f dans la base $\mathscr{B}$.
Ce déterminant ne dépend pas de la base choisie donc il ne dépend pas de la matrice représentant f.

Proposition 29

Soit E un $\mathbb{K}-$ev de dimension n muni d'une base $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ et soit $f \in \mathscr{L}(E)$.
Le déterminant de f est égal à $\det_{\mathscr{B}}(f(e_1), \dots, f(e_n))$.

démo : Posons $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$. On remplit A en inscrivant en colonnes les coordonnées des vecteurs $f(e_j)$ dans la base $\mathscr{B}$, donc $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f(e_1), \dots, f(e_n))$. On a donc $\det f = \det A = \det_{\mathscr{B}}(f(e_1), \dots, f(e_n))$

Proposition 30 ✰ *Caractérisation des automorphismes*

Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension n. Soit $f \in \mathscr{L}(E)$.
f est un automorphisme si et seulement si $\det f \neq 0$.

démo : f est linéaire par hypothèse. f est bijective si et seulement si sa matrice A dans une base de E (quelconque) est inversible, donc si et seulement si $\det f = \det A \neq 0$.

Proposition 31

Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension n.

- $\det(\mathrm{Id}_E) = 1$.
- $\forall \lambda \in \mathbb{K},\ \forall f \in \mathscr{L}(E),\ \det(\lambda f) = \lambda^n \det(f)$.
- $\forall f,\ g \in \mathscr{L}(E),\ \det(f \circ g) = \det(f)\det(g)$.
- $\forall f \in \mathscr{L}(E),\ \forall k \in \mathbb{N},\ \det(f^k) = (\det f)^k$.
- Soit $f \in \mathscr{L}(E)$. Si f est bijective alors $\det(f^{-1}) = \dfrac{1}{\det f}$.

démo : direct en utilisant les propriétés du déterminant d'une matrice.

Gabriel Cramer (1704-1752)

Pierre simon Laplace (1749-1827)