I. ISOMÉTRIES VECTORIELLES

E désigne un $\mathbb{R}-$espace vectoriel euclidien dans ce chapitre. On note le produit scalaire $<\cdot,\cdot>$ et la norme associée $\|\cdot\|$. On rappelle qu'un espace euclidien est un espace de dimension finie.

1. Définition et caractérisation d'une isométrie

Définition 1 : Soit $f \in \mathscr{L}(E)$.
On dit que f est une isométrie vectorielle de E si f conserve la norme, i.e. $\forall x \in E,\ \|f(x)\| = \|x\|$.

Notation : On note $O(E)$ l'ensemble des isométries vectorielles de E.

Proposition 1

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$. f est une isométrie vectorielle si et seulement si $\forall (x,y) \in E^2,\ <f(x), f(y)> = <x,y>$.

démo : par double implication,

➢ Si f conserve le produit scalaire alors f conserve la norme.

➢ Supposons que $f \in \mathscr{L}(E)$ soit une isométrie vectorielle.

Soients $x,\ y \in E$, on utilise l'identité de polarisation $\forall u,\ v \in E,\ <u,v> = \frac{1}{2}\left(\|u+v\|^2 - \|u\|^2 - \|v\|^2\right)$.

$$\begin{aligned}
<f(x), f(y)> &= \frac{1}{2}\left(\|f(x)+f(y)\|^2 - \|f(x)\|^2 - \|f(y)\|^2\right),\\
&= \frac{1}{2}\left(\|f(x+y)\|^2 - \|f(x)\|^2 - \|f(y)\|^2\right), \text{ par linéarité de } f\\
&= \frac{1}{2}\left(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\right) = <x,y>, \text{ car } f \text{ conserve la norme}
\end{aligned}$$

2. Premières propriétés

Proposition 2

- Si f est une isométrie vectorielle alors f est un automorphisme de E.
- Si $f \in O(E)$ alors les valeurs propres réelles de f sont dans l'ensemble $\{-1,1\}$.
- La composée de deux isométries est une isométrie.
- La bijection réciproque d'une isométrie est une isométrie.

démo en exercice

Exemple 1

- Id_E et $-\mathrm{Id}_E$ sont des isométries vectorielles de E.
- Si E est de dimension 1, les endomorphismes de E sont de la forme $x \mapsto ax$ avec $a \in \mathbb{R}$. Il y a deux isométries de E qui sont Id_E et $-\mathrm{Id}_E$ (ce sont les seules isométries de E dans ce cas).
- Soit $s \in \mathscr{L}(E)$ une symétrie orthogonale. Vérifier que s est une isométrie vectorielle de E.
- Si s est une symétrie vectorielle et une isométrie d'un espace E, montrer que s est une symétrie orthogonale.
- Un projecteur orthogonal, différent de Id_E et de 0_E, n'est pas une isométrie de E.

Proposition 3

Soit $f \in O(E)$.
Soit F un sous-espace vectoriel de E que l'on suppose stable par f, i.e. $\forall x \in F,\ f(x) \in F$. Alors

- $f(F) = F$.
- $F^\perp$ est stable par f et f induit une isométrie vectorielle sur $F^\perp$.

démo : Rappel : $f(F)$ désigne l'ensemble $\{f(x),\ x \in F\}$.

➢ Prenons une base $(e_1, \dots, e_p)$ de F. $(e_1, \dots, e_p)$ est libre et f est bijective donc la famille $(f(e_1), \dots, f(e_p))$ est libre. En conclure que c'est une base de F et aussi de $f(F)$.

➢ Soit $x \in F^\perp$, on veut montrer que $f(x) \in F^\perp$. Prenons donc $x' \in F$, et considérons $< f(x), x' >$ (on veut montrer que ce réel est nul).

Comme $F = f(F)$, et $x' \in F$, il existe x_0 dans F tel que $f(x_0) = x'$. Donc $< f(x), x' >=< f(x), f(x_0) >=< x, x_0 >$ car f est une isométrie. De plus, $< x, x_0 >= 0$ car $x \in F^\perp$ et $x_0 \in F$.

On a donc prouvé que $\forall x' \in F$, $< f(x), x' >= 0$, donc $f(x) \in F^\perp$. Ainsi, $\forall x \in F^\perp,\ f(x) \in F^\perp$. $F^\perp$ est stable par F.

L'application induite par f sur $F^\perp$ est définie par : $\tilde{f} : \begin{array}{ccc} F^\perp & \to & F^\perp \\ x & \mapsto & f(x) \end{array}$. $\tilde{f}$ est une isométrie de $F^\perp$ car elle conserve la norme.

3. De nouvelles caractérisations

Proposition 4 *Par les bases*

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) f est une isométrie vectorielle de E.

(ii) Pour toute base $\mathscr{B}$ orthonormée de E, l'image de $\mathscr{B}$ par f est une base orthonormée.

(iii) Il existe une base $\mathscr{B}$ orthonormée de E telle que l'image de $\mathscr{B}$ par f est une base orthonormée.

démo : On a sans difficulté (i) $\Longrightarrow$ (ii) $\Longrightarrow$ (iii).

Montrons que (iii) $\Longrightarrow$ (i). On suppose que $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base orthonormée de E telle que $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ est une base orthonormée de E.

Soit $x \in E$, on note $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ le vecteur écrit dans la base $\mathscr{B}$. On veut montrer que $\|f(x)\| = \|x\|$.

Or $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$ car $(e_1, \dots, e_n)$ est une base orthonormée de E.

On a $f(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i f(e_i)$ car f est linéaire et puisque $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ est une base orthonormée de E, le calcul de $\|f(x)\|$ se fait grâce aux coordonnées de $f(x)$ dans cette base : $\|f(x)\|^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$.

On a donc bien $\|x\| = \|f(x)\|$. On en conclut que $\forall x \in E,\ \|f(x)\| = \|x\|$ donc f est une isométrie vectorielle.

Questions sur cette démo : quel est l'outil principal ? Quelle est la structure utilisée pour démontrer les équivalences ?

Proposition 5 *Par les matrices*

Soit E un espace euclidien de dimension n, muni d'une base **orthonormée** $\mathscr{B}$. Soit $f \in \mathscr{L}(E)$.
f est une isométrie vectorielle si et seulement si $Mat_{\mathscr{B}}(f)$ est orthogonale.

démo : ➢ Supposons que f est une isométrie vectorielle de E, et notons $M = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$.

Soit $x \in E$, on note $X = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x)$ et on a $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f(x)) = MX$. On adopte des notations similaires pour $y \in E$.

On sait que $< f(x), f(y) >=< x, y >$. La propriété de u se traduit matriciellement par :

$\forall X,\ Y \in M_{n,1}(\mathbb{R}),\ (MX)^T MY = X^T Y$, soit $X^T M^T MY = X^T Y$.

En utilisant cette relation pour $X = E_i$ et $Y = E_j$, on prouve que $M^T M = I_n$, donc M est orthogonale.

➢ Réciproquement, si on suppose que M est orthogonale, on a $M^T M = I_n$, donc

$\forall X,\ Y \in M_{n,1}(\mathbb{R}),\ (MX)^T MY = X^T Y$.

Cela prouve en revenant aux vecteurs que $\forall x,\ y \in E,\ < f(x), f(y) >=< x, y >$, donc f est une isométrie de E.

Questions sur cette démo : quel est l'outil principal ? Peut-on affirmer $X^T MY = 0 \Longrightarrow M = 0$ pour une matrice M donnée ?

4. Groupe orthogonal $O(E)$

Rappel : On note $O(E)$ l'ensemble des isométries vectorielles de E, espace euclidien (ou $O_n(E)$ avec n la dimension de E.)

L'ensemble des matrices orthogonales de $M_n(\mathbb{R})$ est noté $O(n)$.

Proposition 6

- $\mathrm{Id}_E \in O(E)$.
- Pour tout $(f,g) \in O(E)^2,\ f \circ g \in O(E)$.
- Pour tout $f \in O(E)$, $f \in GL(E)$ et $f^{-1} \in O(E)$.

Définition 2 :
Soit E un espace euclidien.
➢ On appelle isométrie vectorielle positive (resp. négative) toute isométrie f telle que $\det f = 1$ (resp. $\det f = -1$).
➢ On note $SO(E)$ l'ensemble des isométries positives de E, c'est le **groupe spécial orthogonal**.
➢ On note $SO(n)$ l'ensemble des matrices orthogonales M de $M_n(\mathbb{R})$ telles que $\det M = 1$.

Remarque 1 :

➢ Id_E est dans $SO(E)$,

➢ $SO(E)$ est stable par composition : $\forall f,\ g \in SO(E),\ f \circ g \in SO(E)$

➢ $SO(E)$ est stable par passage à l'inverse (bijection réciproque): $\forall f \in SO(E),\ f^{-1} \in SO(E)$.

L'ensemble $O(E)$, muni de la loi $\circ$ est un groupe, et $SO(E)$ en est un sous-groupe.

Vocabulaire

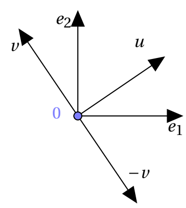
➢ Les isométries positives sont aussi appelées **rotations**.
➢ Les symétries orthogonales sont des isométries. Elles peuvent être positives ou négatives (cela dépend de la dimension de leurs espaces caractéristiques). On appelle **réflexion** toute symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan de E. Montrez que ce sont des isométries négatives. *On peut écrire leur matrice dans une base orthonormée bien choisie.*

5. Orientation d'un espace euclidien de dimension 2 ou 3

Soit E un espace euclidien de dimension n muni d'une base $\mathscr{B}_0$.
Choisir l'orientation de E c'est se donner une base $\mathscr{B}_0$ de référence (i.e. dire que $\mathscr{B}_0$ est une base directe).
Prenons en effet une autre base $\mathscr{B}$ de E. On sait que $\det_{\mathscr{B}_0} \mathscr{B} \neq 0$, donc ce déterminant est soit strictement positif, soit strictement négatif.
Si $\det_{\mathscr{B}_0} \mathscr{B} > 0$ alors on dit que $\mathscr{B}$ est une base directe.
Si $\det_{\mathscr{B}_0} \mathscr{B} < 0$ alors on dit que $\mathscr{B}$ est une base indirecte.
Le choix d'une orientation partage donc l'ensemble des bases de E en deux catégories, appelées **bases directes et bases indirectes**.

Remarque 2 :

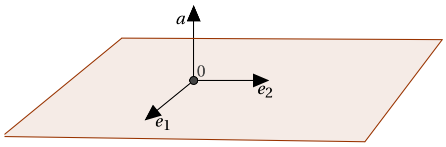
➢ Si $\mathscr{B}_0$ est une base orthonormée directe, et $\mathscr{B}$ est une base orthonormée directe, on a $\det_{\mathscr{B}_0} \mathscr{B} = 1$ et si $\mathscr{B}$ est indirecte, on a $\det_{\mathscr{B}_0} \mathscr{B} = -1$.
La matrice de passage entre deux bases orthonormées directes est une matrice de $SO(n)$.
➢ On montre que le déterminant d'une famille de n vecteurs dans un espace de dimension n, ne dépend pas de la base orthonormée directe dans laquelle il est calculé. On appelle alors **produit mixte** le déterminant d'une famille dans une base orthonormée directe quelconque (détails dans le cas $n = 3$ ci-dessous).



Soit un espace E euclidien de dimension 3 orienté.

Orientation des plans de E

On veut aussi orienter les plans de E. Soit P un plan de E, i.e. un sous-espace de E de dimension 2. On dit que l'on oriente le plan P par le choix d'un vecteur normal a de P : les bases orthonormées directes (e_1, e_2) de P sont les bases de P telles que (e_1, e_2, a) est une base directe de E.



Proposition 7 Produit mixte

Soit $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ deux bases orthonormées directes de E. Soit (u, v, w) une famille de E.
➢ Le déterminant de la base (u, v, w) est le même calculé dans la base $\mathscr{B}$ et dans la base $\mathscr{B}'$.
➢ On appelle **produit mixte** ce déterminant, on note $[u, v, w] = \det_{\mathscr{B}}(u, v, w)$.

démo : On note $M = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u, v, w)$, et $M' = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(u, v, w)$. On veut montrer que $\det M = \det M'$.
M est la matrice de passage de la base $\mathscr{B}$ à la base $\mathscr{B}_1 = (u, v, w)$. Et M' est la matrice de passage de $\mathscr{B}'$ à $\mathscr{B}_1$.
On note P la matrice de passage de la base $\mathscr{B}$ à la base $\mathscr{B}'$.
Justifier la relation $M' = P^{-1}M$, et conclure que $\det M' = \det(P^{-1}) \det M$.
Or P est une matrice orthogonale donc P^{-1} aussi car c'est une matrice de passage entre deux bases orthonormées. De plus ces deux bases sont supposées directes, donc $\det P^{-1} = 1$.

II. GROUPE ORTHOGONAL EN DIMENSION 2

On se place ici dans E un espace euclidien de dimension 2.

1. Description des matrices de $O(2)$

Proposition 8

Les éléments de $O(2)$ sont les matrices de la forme
$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \text{ ou } S(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} \text{ avec } \theta \in \mathbb{R}.$$
De plus, $SO(2) = \{R(\theta),\ \theta \in \mathbb{R}\}$.

démo : Soit $M \in O(2)$, on note $M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$.

Les vecteurs colonnes de M forment une base othonormée de $\mathbb{R}^2$: il existe donc $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$. Le vecteur $\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ est un vecteur unitaire et orthogonal à $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, il est donc égal à $\begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} \sin\theta \\ -\cos\theta \end{pmatrix}$.
Réciproquement, les matrices de cette forme sont bien dans $O(2)$. Enfin, pour identifier les éléments de $SO(2)$, on calcule le déterminant des matrices.

Proposition 9

Pour toutes matrices M et P de $SO(2)$, on a $MP = PM$.

démo : on vérifie que $\forall \theta,\ \theta' \in \mathbb{R}$, $R(\theta)R(\theta') = R(\theta + \theta')$, ce qui permet de conclure.

Les matrices de $SO(2)$ commutent entre elles. Ce n'est pas vrai dans $O(2)$, ni dans $SO(n)$ pour $n \geqslant 3$.

2. Description des isométries vectorielles positives

Proposition 10

Soit E un $\mathbb{R}-$espace vectoriel de dimension 2 orienté.
Soit $r \in SO(E)$, il existe un unique $\theta \in [0, 2\pi[$ tel que **dans toute base orthonormée directe** de E, la matrice de r est $R(\theta)$. On dit que r est une **rotation d'angle** θ.

démo : Soit r une isométrie vectorielle positive de E. On note $R = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(r)$ et on a donc $R \in SO(2)$. Il existe donc $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $R = R(\theta)$.
Considérons maintenant une autre base orthonormée directe $\mathscr{B}'$ et $R' = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(r)$.
De même, on sait que $R' \in SO(2)$ donc il existe $\theta' \in \mathbb{R}$ tel que $R' = R(\theta')$.
Posons P la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$, on a $R' = P^{-1}RP$.
De plus, P est la matrice de passage entre deux bases orthonormées directes, donc $P \in SO(2)$.
On sait alors que P, P^{-1} et R sont dans $SO(2)$ donc elles commutent entre elles : $R' = RPP^{-1} = R$.

3. Description des isométries vectorielles négatives

Proposition 11

Soit E un $\mathbb{R}-$espace vectoriel de dimension 2 et $\mathscr{B}$ une base orthonormée directe de E.

- L'endomorphisme orthogonal s dont la matrice dans $\mathscr{B}$ est $S(\theta)$ est la réflexion par rapport à la droite d'équation cartésienne $x\sin\frac{\theta}{2} - y\cos\frac{\theta}{2} = 0$ dans $\mathscr{B}$.
- Une isométrie vectorielle négative est une réflexion.

démo : On note D la droite d'angle polaire $\dfrac{\theta}{2}$, elle a pour équation dans $\mathscr{B}$: $\sin\dfrac{\theta}{2}x - \cos\dfrac{\theta}{2}y = 0$.
On considère s de matrice $S(\theta)$ dans la base $\mathscr{B} = (e_1, e_2)$. Cette matrice est symétrique et orthogonale donc $I_2 = S^T S = S^2$, elle représente donc une symétrie. Cherchons ses éléments caractéristiques.
➙ On cherche Ker $(s - \mathrm{Id}_E)$. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$,

$$SX = X \iff \begin{cases} x\cos\theta + y\sin\theta &= x \\ x\sin\theta - y\cos\theta &= y \end{cases} \iff \begin{cases} x(\cos\theta - 1) + y\sin\theta &= 0 \\ x\sin\theta - y(\cos\theta + 1) &= 0 \end{cases}.$$

Or $\cos\theta - 1 = -2\sin^2\frac{\theta}{2}$, $\cos\theta + 1 = 2\cos^2\frac{\theta}{2}$ et $\sin\theta = 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$, donc

$$SX = X \iff \begin{cases} -2\sin\frac{\theta}{2}(x\sin\frac{\theta}{2} - y\cos\frac{\theta}{2}) &= 0 \\ 2\cos\frac{\theta}{2}(x\sin\frac{\theta}{2} - y\cos\frac{\theta}{2}) &= 0 \end{cases} \iff x\sin\frac{\theta}{2} - y\cos\frac{\theta}{2} = 0,$$

car $-2\sin\frac{\theta}{2}$ et $-2\cos\frac{\theta}{2}$ ne s'annulent pas simultanément. Donc Ker $(s - \mathrm{Id}_E) = \mathrm{Vect}(\cos\frac{\theta}{2}\, e_1 + \sin\frac{\theta}{2}\, e_2)$, c'est l'axe de la symétrie que l'on note D.
➙ On cherche de même $\ker(s + \mathrm{Id}_E)$, et on obtient $D^{\perp}$. s est donc une symétrie orthogonale.
➙ Toute isométrie vectorielle indirecte du plan a une matrice de la forme $S(\theta)$ dans une certaine base. Donc c'est une réflexion.

Remarque : Si la matrice de s dans la base $\mathscr{B}$ est $S(\theta)$ pour un $\theta \in \mathbb{R}$, alors s est une réflexion et l'axe de s a pour équation cartésienne $x\sin\frac{\theta}{2} - y\cos\frac{\theta}{2} = 0$ dans $\mathscr{B}$.

4. En pratique

Soit $f \in O(E)$ avec E un $\mathbb{R}-$espace vectoriel de dimension 2, soit $A = Mat_{\mathscr{B}}(f)$ où $\mathscr{B}$ est orthonormée directe.
On sait que A est orthogonale. On demande de caractériser f (ou A), ou de donner la nature de f (ou A) et de préciser ses éléments caractéristiques.
➢ On commence par calculer $\det A$: on trouve 1 ou -1.
➙ Si $\det A = 1$, f est une rotation et on détermine son angle (voir la matrice).
➙ Si $\det A = -1$, f est une réflexion et on détermine son axe (invariants, i.e. ssep associé à 1).

La discussion peut aussi se faire suivant la dimension de $\ker(f - \mathrm{Id}_E)$:

➞ Si $\ker(f - \mathrm{Id}_E) = \{0\}$, alors f est une rotation.

➞ Si $\ker(f - \mathrm{Id}_E)$ est de dimension 1, alors f est une réflexion d'axe $\ker(f - \mathrm{Id}_E)$.

➞ Si $\ker(f - \mathrm{Id}_E)$ est de dimension 2, alors $f = \mathrm{Id}_E$.

On peut aussi vous donner A et vous demander la nature de l'endomorphisme associé : A peut alors être la matrice d'une projection, d'une symétrie, d'une symétrie orthogonale, d'une rotation. Seules les deux dernières catégories correspondent à une matrice orthogonale.

Exemple 2 : $A = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$.

Vérifier que A et B sont des éléments de $O(2)$. Déterminer la nature des endomorphismes f et g canoniquement associés à A et B.

III. GROUPE ORTHOGONAL EN DIMENSION 3

On se place ici dans E un espace euclidien de dimension 3.

1. Description de $O(E)$

Proposition 12

Soit $A \in O(3)$. A admet au moins une valeur propre réelle (qui est donc 1 ou -1).

démo : le polynôme caractéristique de A est de degré 3, il admet au moins une racine réelle.

Proposition 13

Soit $f \in O(E)$.
Il existe une base orthonormée directe $\mathscr{B}_1$ de E et un $\theta \in \mathbb{R}$ tels que

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_1}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \text{ ou } \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_1}(f) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

démo : f admet pour valeur propre 1 ou -1.

➢ Notons e_1 un vecteur propre de f associé à cette valeur propre 1 ou -1, notée ε. On note $F = \mathrm{Vect}(e_1)$.

F est stable par f, donc $F^\perp$ est stable par f et f induit sur $F^\perp$ un endomorphisme orthogonal noté $\tilde{f}$.

Ici, on a $F^\perp$ de dimension 2, on oriente ce plan par e_1.

$\tilde{f}$ est un endomorphisme orthogonal d'un plan, c'est donc soit une rotation, soit une réflexion.

➞ Premier cas : $\tilde{f}$ est une rotation, on note θ son angle.

Sa matrice dans toute base orthonormée directe de $F^\perp$ est $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.

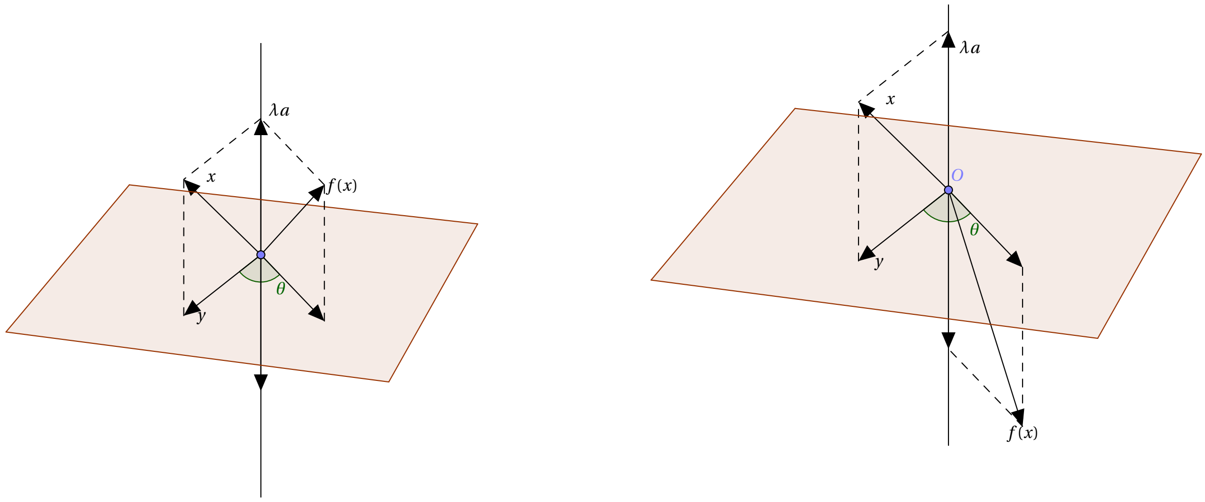
La matrice de f dans une base orthonormée directe de premier vecteur e_1 est donc de l'une des formes de l'énoncé.

➞ Deuxième cas : $\tilde{f}$ est une réflexion, sa matrice dans une base orthonormée directe adaptée (e_2, e_3) de $F^\perp$ est $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Si $\varepsilon = 1$, on se place dans (e_3, e_1, e_2) (orthonormée directe), et la matrice de f est $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (de la forme demandée avec $\theta = 0$). C'est une réflexion par rapport au plan $\mathrm{Vect}(e_1, e_2)$.

Si $\varepsilon = -1$, on se place dans la base (e_2, e_3, e_1) de E, la matrice de f est de la forme demandée (avec $\theta = \pi$). C'est une rotation.

□



➢ Interprétation des résultats : Prenons un élément f de $O(E)$, et M sa matrice associée dans une base orthonormée directe de E. Nous savons que 1 ou -1 est valeur propre de f.

➢ Dans le premier cas de la propriété, on a trouvé une base orthonormée directe dans laquelle $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_1}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.

➙ Si $\theta \notin \{k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$, f est une isométrie positive, que l'on nomme **rotation**. Le sous-espace propre associé à la valeur propre 1 de f est de dimension 1, c'est l'axe $\Delta = \ker(f - \mathrm{Id}_E)$ de la rotation. On définit son angle par θ après avoir orienté le plan $\Delta^\perp$ par le choix du vecteur e_1 (orthogonal au plan). *Si on change l'orientation du plan, on change aussi le signe de l'angle.*

➙ Si $\theta \in \{2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$, alors $f = \mathrm{Id}_E$.

➙ Si $\theta \in \{(2k+1)\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$, alors f est alors une symétrie orthogonale par rapport à la droite $\Delta = \ker(f - \mathrm{Id}_E)$. Le sous-espace propre associé à -1 est de dimension 2, et c'est $\Delta^\perp$. f est aussi une rotation d'angle π et d'axe Δ.

➢ Dans le deuxième cas de la propriété, on a trouvé une base orthonormée directe dans laquelle $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_1}(f) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.

➙ Si $\theta \notin \{k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$, alors f peut s'écrire comme la **composée d'une rotation et d'une réflexion**. On le prouve en utilisant le produit de matrices :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_1}(f) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Le sous-espace propre associé à la valeur propre -1 de f est de dimension 1, c'est l'axe $\Delta = \ker(f + \mathrm{Id}_E)$ de la rotation. Le plan de la réflexion est alors $\Delta^\perp$.

➙ Si $\theta \in \{2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$, alors f est une **réflexion** par rapport au plan $P = \ker(f - \mathrm{Id}_E)$.

➙ Si $\theta \in \{(2k+1)\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$, alors $f = -\mathrm{Id}_E$. On remarque alors que f est la composée d'une réflexion et d'une rotation d'angle π.

➢ Classement par le déterminant

➙ Si $\det f = 1$ alors f est une rotation ou l'identité (qui est une rotation d'angle 0).

➙ Si $\det f = -1$ alors f est soit une réflexion, soit la composée d'une réflexion et d'une rotation d'axe orthogonal au plan de la réflexion, soit $-\mathrm{Id}_E$ (qui est aussi une composée réflexion/rotation).

➢ Classement par la dimension de $\ker(f - \mathrm{Id}_E)$

➞ Si $\dim(\ker(f - \mathrm{Id}_E)) = 0$ alors f est la composée de d'une réflexion et d'une rotation d'axe orthogonal au plan de la réflexion.
Dans ce cas, 1 *n'est pas valeur propre, aucun vecteur n'est invariant par* f.
➞ Si $\dim(\ker(f - \mathrm{Id}_E)) = 1$ alors f est une rotation.
Dans ce cas, 1 *est valeur propre simple, le sous-espace propre est l'axe de la rotation* f.
➞ Si $\dim(\ker(f - \mathrm{Id}_E)) = 2$ alors f est une réflexion.
Dans ce cas, 1 *est valeur propre double, le sous-espace propre est le plan de la réflexion* f.
➞ Si $\dim(\ker(f - \mathrm{Id}_E)) = 3$ alors f est l'identité.
Dans ce cas, 1 *est valeur propre triple. Tous les vecteurs de* E *sont invariants.*

2. Reconnaissance des rotations

Rappel : tous les éléments de $SO(E)$ sont appelés isométries positives ou rotations.
Les **éléments caractéristiques** d'une rotation sont son axe (ensemble des invariants) et son angle.

Proposition 14

> Soit f la rotation d'axe Δ, orienté par le vecteur a unitaire, et d'angle θ.
> On note A la matrice de f dans une base $\mathcal{B}$ de E.
> - L'axe Δ est le sous-espace propre associé à la valeur propre 1.
> - L'angle θ est déterminé par les relations
> $\mathrm{tr}(A) = 2\cos\theta + 1$ et $sg(\sin\theta) = sg\left([x, f(x), a]\right)$ pour $x \in E$ non colinéaire à a.

démo : pour la dernière relation, on choisit de travailler dans une base orthonormée directe adaptée $\mathcal{B}_0$ (mais le déterminant d'une famille est le même quelle que soit la base orthonormée directe choisie). On peut donc supposer que $A_0 = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_0}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.

Et en prenant x non colinéaire à a, on écrit $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_0}(x) = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$, avec $(\beta, \gamma) \neq 0$.

Ainsi $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_0}(f(x)) = A_0 X = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta\cos\theta - \gamma\sin\theta \\ \beta\sin\theta + \gamma\cos\theta \end{pmatrix}$.

Calculons alors le déterminant $\det_{\mathcal{B}_0}(x, f(x), a) = \begin{vmatrix} \alpha & \alpha & 1 \\ \beta & \beta\cos\theta - \gamma\sin\theta & 0 \\ \gamma & \beta\sin\theta + \gamma\cos\theta & 0 \end{vmatrix} = (\beta^2 + \gamma^2)\sin\theta$. On conclut. En pratique, pour le calcul, on travaillera dans une base orthonormée directe $\mathcal{B}$ quelconque.

Exemple 3 : $A = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

Proposition 15

> Soit r une rotation, on note Δ son axe orienté par a, vecteur unitaire, et $\theta \in \mathbb{R}$ son angle.
> Pour tout $x \in E$, on a $r(x) = \cos\theta\ x + (1 - \cos\theta) < x, a > a + \sin\theta\ (a \wedge x)$.

démo : On note $P = \Delta^{\perp}$, c'est un plan que l'on oriente par le choix de a.
➢ Dans un premier temps, on prend $x \in \Delta^{\perp}$, non nul.
Dans ce cas, $r(x) = \cos\theta x + \sin\theta\ a \wedge x$. Preuve : On pose $b = \dfrac{x}{\|x\|}$, et $c = a \wedge b$. La famille (b, c, a) est une base orthonormée directe de E, et (b, c) est une base orthonormée directe du plan P. On écrit x dans cette base $x = \|x\| b$. La matrice de

r dans (a,b,c) est $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$, donc $r(x)$ a pour coordonnées $M\begin{pmatrix} 0 \\ \|x\| \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \|x\|\cos\theta \\ \|x\|\sin\theta \end{pmatrix}$ dans la base (a,b,c).

On en déduit que $r(x) = \cos\theta\|x\|b + \sin\theta\ \|x\|c = \cos\theta x + \sin\theta\ a \wedge x$.

➢ Prenons maintenant $x \in E$, et écrivons le dans la décomposition $\Delta \bigoplus \Delta^\perp = E$: $x =< x, a > a + y$ avec $y \in P$.

On en déduit $r(x) =< x, a > r(a) + r(y)$ donc $r(x) ==< x, a > a + \cos\theta y + \sin\theta\ a \wedge y$, car $y \in P$.

Or $y = x- < x, a > a$, donc $a \wedge y = a \wedge x$, et on remplace dans l'expression de $r(x)$ pour obtenir le résultat attendu.

3. Reconnaissance des réflexions

On rappelle qu'une **réflexion** de l'espace E de dimension 3 est une symétrie orthogonale par rapport à un plan F de E.

Les réflexions sont les éléments de $O(E)$ de déterminant -1 qui admettent 1 pour valeur propre.

Une réflexion admet 1 pour valeur propre double et -1 pour valeur propre simple. Le sous-espace propre $\ker(f - \mathrm{Id}_E)$ est le plan de la réflexion.

4. Bilan

En pratique, on vous donne $f \in \mathscr{L}(E)$ et on vous demande de reconnaître f et de donner ses éléments caractéristiques. La première chose à faire est de déterminer si $f \in O(E)$. Si ce n'est pas le cas, f est probablement une projection ou une symétrie (non orthogonale).

On suppose dans la suite que $f \in O(E)$

Première méthode : discussion suivant le déterminant

➢ Si $\det(f) = 1$ alors f est une rotation, on doit déterminer son axe (les invariants) et son angle.

➢ Si $\det(f) = -1$ alors f peut-être une réflexion ou la composée d'une rotation d'axe Δ et d'une réflexion par rapport au plan orthogonal à Δ. On fixe une base orthonormée $\mathscr{B}$ de E.

On note A la matrice de f dans $\mathscr{B}$.

➙ Si A est symétrique, alors f est une symétrie orthogonale : on cherche l'ensemble des invariants, f est la symétrie orthogonale par rapport à cet ensemble.

➙ Si A n'est pas symétrique, on considère $-f$: c'est une rotation de E (car $\det(-f) = (-1)^3 \det(f) = 1$). On cherche son axe Δ et son angle θ.

Alors f est la composée de la rotation d'axe Δ, d'angle $\theta + \pi$ et de la réflexion par rapport au plan $\Delta^\perp$.

Deuxième méthode : discussion suivant les invariants de f

➢ Si $\ker(f - \mathrm{Id}_E) = \{0\}$ alors f est la composée d'une rotation et d'une réflexion.

Vous pouvez vérifier que -1 est la seule valeur propre de f et qu'elle est de multiplicité 1 ou 3.

L'axe de la rotation est $\ker(f + \mathrm{Id}_E)$.

➢ Si $\ker(f - \mathrm{Id}_E)$ est de dimension 1, alors f est une rotation d'axe $\ker(f - \mathrm{Id}_E)$.

➢ Si $\ker(f - \mathrm{Id}_E)$ est de dimension 2, alors f est une réflexion par rapport à $\ker(f - \mathrm{Id}_E)$.

➢ Si $\ker(f - \mathrm{Id}_E)$ est de dimension 3, alors f est Id_E.

En conclusion, les isométries vectorielles d'un espace de dimension 3 sont soit des rotations (caractérisées par un axe et un angle, soit des réflexions (caractérisées par un plan), soit la composée d'une rotation et d'une réflexion (l'axe de la rotation et le plan de la réflexion sont des ssev orthogonaux).