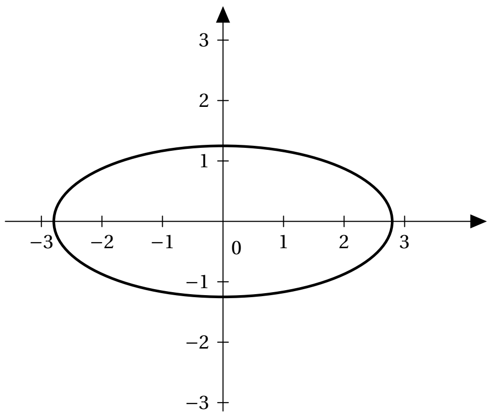
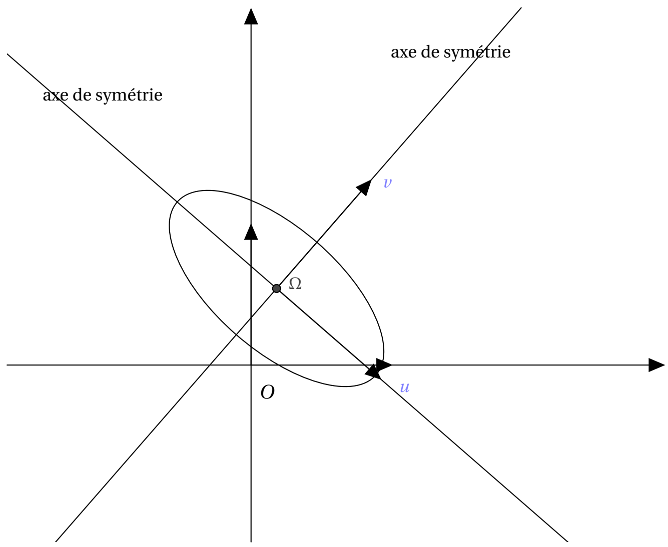
Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$. On se place dans un plan affine (avec des points et des vecteurs).

I. ÉTUDE DES TROIS CONIQUES

Dans ce paragrpahe, on commence par étudier les trois coniques de référence : ellipse, hyperbole, parabole.
Pour chacune, on donne les éléments caractéristiques obtenus à partir de leur **équation réduite** : l'axe focal, le centre (s'il existe), le demi-grand axe et le demi-petit axe, les sommets, les tangentes, les asymptotes (pour l'hyperbole).
Les foyers, les directrices et l'excentricité sont évoqués mais ce sont des notions hors-programme.
L'étude, laissée en exercice, pourra être menée à partir des équations paramétriques.

1. L'ellipse





➢ Équation réduite (avec $0<b<a$), dans un repère orthonormé $(\Omega;\vec{u},\vec{v})$: $\boxed{\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1}$

➢ Éléments caractéristiques : l'axe focal est l'axe $(\Omega;\vec{u})$.
La courbe admet deux axes de symétrie $(\Omega;\vec{u})$ et $(\Omega;\vec{v})$. Son centre est le point Ω, c'est un centre de symétrie.
On appelle a le demi-grand axe et b le demi-petit axe de l'ellipse.
Les sommets sont les points $A(a,0)$, $A'(-a,0)$, $B(0,b)$, $B'(0,-b)$.

➢ Équations paramétrées : $\begin{cases} x(t) &= a\cos(t) \\ y(t) &= b\sin(t) \end{cases}$, $t\in[0,2\pi[$

➢ Tangentes : Soit $\mathscr{E}$ l'ellipse d'équation $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$. Soit $M_0(x_0,y_0)$ un point de $\mathscr{E}$.
La tangente à $\mathscr{E}$ en M_0 a pour équation $\dfrac{x_0}{a^2}x+\dfrac{y_0}{b^2}y=1$.

Remarque 1 : (Hors programme) on définit $c>0$ et $e\in]0,1[$ par les relations : $a^2=b^2+c^2$ et $c=ae$.
Les foyers ont pour coordonnées $F(-c,0)$ et $F'(c,0)$. Les directrices ont pour équations $x=-\dfrac{a}{e}$ et $x=\dfrac{a}{e}$.
Vous pouvez vérifier que l'ellipse est aussi l'ensemble des points M qui vérifient $MF=e\times d(M,\mathscr{D})$.
Vous pourrez aussi vérifier que l'ellipse est l'ensemble des points M tels que $MF+MF'=2a$.

2. L'hyperbole

➢ Équation réduite (avec $a,\ b\in\mathbb{R}^*$), dans un repère orthonormé $(\Omega;\vec{u},\vec{v})$: $\boxed{\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1}$

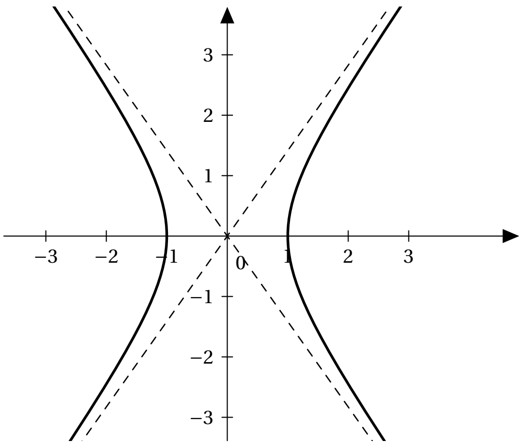
➢ Éléments caractéristiques : l'axe focal est l'axe $(\Omega;\vec{u})$. La courbe admet deux axes de symétrie $(\Omega;\vec{u})$ et $(\Omega;\vec{v})$. Son centre est le point Ω, c'est un centre de symétrie.

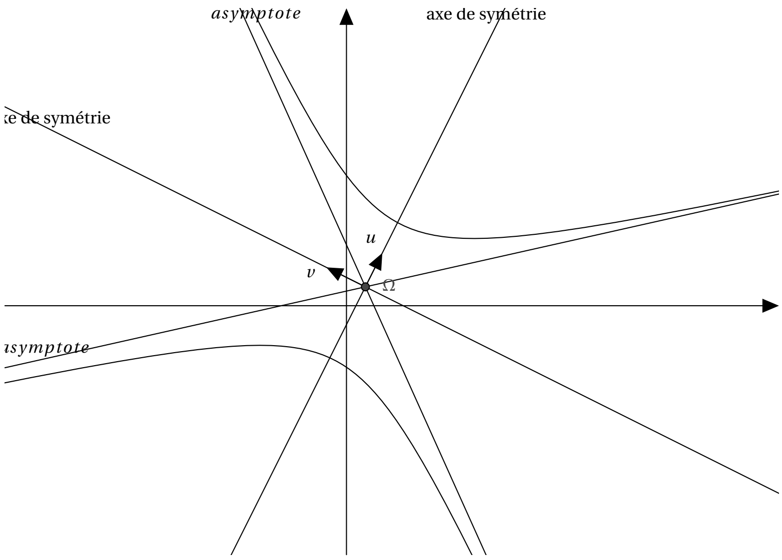
➢Équations paramétrées : il y a deux branches disjointes.

$$\begin{cases} x(t) &= a\,\mathrm{ch}(t) \\ y(t) &= b\,\mathrm{sh}(t) \end{cases},\ t\in\mathbb{R} \text{ et } \begin{cases} x(t) &= -a\,\mathrm{ch}(t) \\ y(t) &= b\,\mathrm{sh}(t) \end{cases},\ t\in\mathbb{R}.$$

➢Tangentes : Soit $\mathscr{H}$ l'hyperbole d'équation $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$. Soit $M_0(x_0,y_0)$ un point de $\mathscr{H}$.
La tangente à $\mathscr{H}$ en M_0 a pour équation $\dfrac{x_0}{a^2}x-\dfrac{y_0}{b^2}y=1$.

➢Asymptotes : l'hyperbole possède deux asymptotes obliques d'équations $y=\dfrac{b}{a}x$ et $y=-\dfrac{b}{a}x$.





Remarque 2 : (Hors programme) on définit $c>0$ et $e>1$ par les relations $c^2=a^2+b^2$ et $c=ae$
Les foyers ont pour coordonnées $F(c,0)$ et $F'(-c,0)$. Les directrices $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ ont pour équations $x=\dfrac{a}{e}$ et $x=-\dfrac{a}{e}$.
Vous pouvez vérifier que l'hyperbole est aussi l'ensemble des points M qui vérifient $MF=e\times d(M,\mathscr{D})$.
Vous pourrez aussi vérifier que l'hyperbole est l'ensemble des points M tels que $\left|MF-MF'\right|=2a$.

3. La parabole

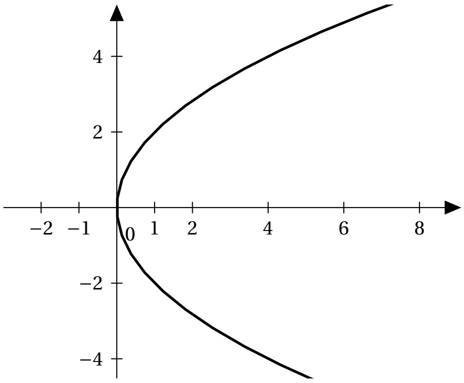
➢ Équation réduite (avec $p\in\mathbb{R}^*$), dans un repère orthonormé $(\Omega;\vec{u},\vec{v})$: $\boxed{y^2=2px}$

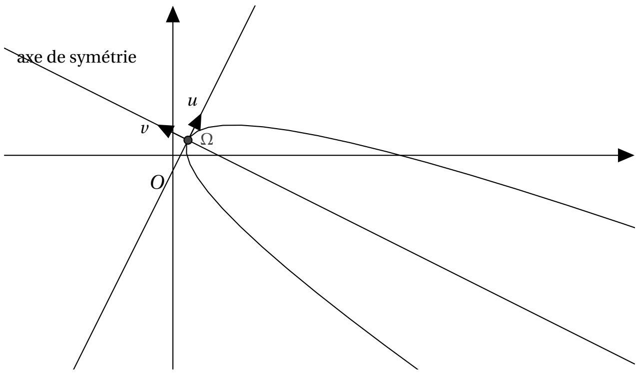
➢ Éléments caractéristiques : l'axe focal est l'axe $(\Omega;\vec{u})$. La courbe admet un seul axe de symétrie $(\Omega;\vec{u})$ et pas de centre.

➢Équations paramétrées : $\begin{cases} x(t) &= \dfrac{t^2}{2p} \\ y(t) &= t \end{cases},\ t\in\mathbb{R}$

➢Tangentes : Soit $\mathscr{P}$ la parabole d'équation $y^2=2px$. Soit $M_0(x_0,y_0)$ un point de $\mathscr{P}$.
La tangente à $\mathscr{P}$ en M_0 a pour équation $y_0y=p(x+x_0)$.

Remarque 3 : (Hors programme) Le foyer a pour coordonnées $F(\frac{p}{2},0)$. La directrice a pour équations $x=-\frac{p}{2}$.
Vous pouvez vérifier que la parabole est aussi l'ensemble des points M qui vérifient $MF=d(M,\mathscr{D})$.





Exemple 1 : On se place dans le repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.
La courbe d'équation cartésienne $\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{4}=1$ est une ellipse.
La courbe d'équation cartésienne $\frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{4}=1$ est une hyperbole.
La courbe d'équation cartésienne $y^2=3x$ est une parabole.

II. DÉFINITION

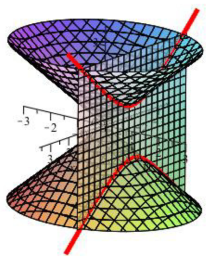
Définition 1 : On appelle conique l'ensemble $\mathscr{C}$ des points M du plan dont les coordonnées (x,y) vérifient une équation du type

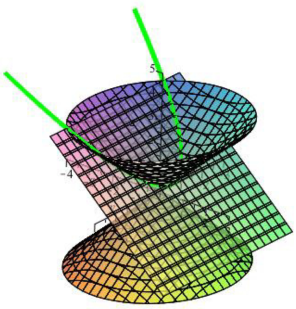
$$ax^2+2bxy+cy^2+dx+ey+f=0\ ,$$

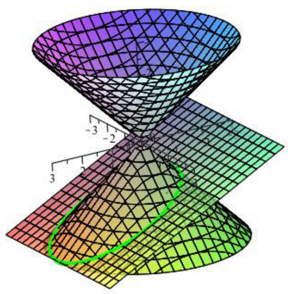
où $a,b,c,d,e,f\in\mathbb{R}$ et $(a,b,c)\neq(0,0,0)$.

On notera $F(x,y)=ax^2+2bxy+cy^2+dx+ey+f$.

Les coniques sont ainsi appelées car ce sont les courbes obtenues en faisant l'intersection d'un cône (de l'espace) et d'un plan.







Exemple 2

1. Dans le paragraphe précédent, les ellipses, hyperboles et paraboles ont été étudiées. Leur équation réduite est du type ci-dessus : ce sont les coniques de référence.
   Par exemple, la parabole $\mathscr{P}$ d'équation $y^2=3x$ est une conique.
   De même, l'ensemble $\mathscr{E}$ d'équation $2x^2+y^2=1$ est une conique, c'est une ellipse.
   Pour ces exemples, les coefficients b, d et e de la définition générale sont nuls.
2. On sait aussi traiter quelques autres exemples simples.
   Par exemple, l'ensemble $\mathscr{C}$ d'équation $x^2+y^2-2x+2y=0$ est un cercle (en préciser son centre et son rayon).
   C'est un exemple de conique.

De même, il est assez simple d'obtenir la nature et l'allure dans certains cas en changeant l'origine du repère car en posant $x' = x - a$ et $y' = y - b$, on peut se ramener à une équation connue (conique de référence) : $x^2 + y^2 - x = 1$ ou $x^2 - \dfrac{y^2}{4} - 2y = 1$ ou $x^2 = 2y - 4$, etc.

3. À partir de la définition, on peut aussi rencontrer quelques exemples de "coniques dégénérées" : ce sont des cas particulier où l'ensemble de points décrit par l'équation est vide, réduit à un point ou réunion de deux droites. Ces cas seront détaillés à la fin du paragraphe suivant.
Par exemple, l'ensemble d'équation $x^2 + y^2 = -1$ est vide, l'ensemble d'équation $x^2 + y^2 = 0$ est réduit à un point, l'ensemble $x^2 - y^2 = 0$ est la réunion des deux droites d'équations $x = y$ et $x = -y$.
Vous remarquerez que c'est la constante f qui joue alors un rôle pour distinguer les cas :
$x^2 + y^2 = 1$ (cercle), $x^2 + y^2 = 0$ (un point), $x^2 + y^2 = -1$ (vide).

L'objectif du paragraphe suivant est de montrer qu'en se plaçant dans un repère orthonormé bien choisi, toutes ces coniques ont une équation réduite simple, et sont donc identifiables (ellipse, hyperbole, parabole ou cas dégénéré).

III. RÉDUCTION D'UNE CONIQUE

On considère une conique définie par une équation cartésienne dans le repère orthonormée $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$:

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0\ .$$

On procède en trois étapes. Pour chacune, on donnera l'objectif, le travail algébrique à mener, l'interprétation géométrique et le dessin associé, et un exemple. En résumé,

➙ le but de l'étape 0 est d'obtenir une écriture matricielle de l'équation cartésienne pour préparer le travail algébrique.
➙ le but de l'étape 1 est d'éliminer les termes en xy : on procède à une diagonalisation, pour trouver une nouvelle base orthonormée $(\vec{u},\vec{v})$ et on se place dans le repère $(O;\vec{u},\vec{v})$ dans lequel l'équation n'a plus de termes en xy.
➙ le but de l'étape 2 est d'éliminer les termes linéaires (en $dx + ey$) : on procède à des mises sous forme canonique, pour trouver une nouvelle origine Ω et on se place dans le repère $(\Omega;\vec{u},\vec{v})$ dans lequel l'équation n'a plus de termes linéaire (du type $dx + ey$).
➙ le but de l'étape 3 est d'identifier la conique, de tracer l'allure dans $(\Omega;\vec{u},\vec{v})$ et dans $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$, et éventuellement de donner les éléments caractéristiques de la conique dans $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ (au moyen de formules de changements de base).

1. <u>Étape 0</u> : obtenir une écriture matricielle de l'équation cartésienne.
Cette étape sert surtout à introduire les outils matriciels utiles. Elle est donc un préalable au travail à engager dans l'étape 1. Elle n'est pas nécessaire si on peut passer directement à l'étape 2.
<u>Écriture matricielle</u> de l'équation cartésienne :
On note $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ et $L = \begin{pmatrix} d & e \end{pmatrix}$. On pose aussi $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, coordonnées du vecteur $\overrightarrow{OM}$ dans $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

$\boxed{\text{L'équation de la conique s'écrit alors } X^T AX + LX + f = 0\ .}$

2. <u>Étape 1</u> : élimination des termes en xy et changement de base du repère.
➢ A est une matrice symétrique réelle, donc d'après le **théorème spectral**, elle est diagonalisable au moyen d'une matrice P orthogonale : il existe $P \in O(2)$ et $D \in M_2(\mathbb{R})$ diagonale telle que $D = P^T AP$.
Elle admet deux valeurs propres réelles λ et μ (éventuellement égales).

En diagonalisant A, on obtient donc P telle que $P^T AP = D = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$.

On a de plus, $\det A = \lambda\mu$ (à justifier). On peut déjà indiquer la nature de la conique (voir le tableau ci-dessous).

➢ (Calcul algébrique) P correspond à un changement de bases orthonormées : P est la matrice de passage de la base canonique de $M_{2,1}(\mathbb{R})$ à la base (U, V) de vecteurs propres de A. On note $\vec{u}$ et $\vec{v}$ les vecteurs du plan correspondant à U et V. P est donc aussi la matrice de changement de base de $\mathscr{B} = (\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ à $\mathscr{B}' = (\vec{u}, \vec{v})$.

➢ (Interprétation géométrique) On se place dans le nouveau repère $(O; \vec{u}, \vec{v})$ où $\mathscr{B}' = (\vec{u}, \vec{v})$ (c'est la base de vecteurs propres trouvée).

On note (x', y') les coordonnées d'un point M dans ce repère : $X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, et $\boxed{X = PX'}$.

L'équation de $\mathscr{C}$ dans ce nouveau repère est obtenue par le calcul suivant :

$$\begin{aligned} M \in \mathscr{C} &\iff X^T AX + LX + f = 0, \\ &\iff (PX')^T A(PX') + LPX' + f = 0, \\ &\iff X'^T DX' + LPX' + f = 0. \end{aligned}$$

➢ Conclusion : en revenant à l'écriture en coordonnées, on obtient une équation cartésienne de $\mathscr{C}$ dans le repère $(O; \vec{u}, \vec{v})$: $\boxed{M(x', y') \in \mathscr{C} \iff \lambda x'^2 + \mu y'^2 + \delta x' + \varepsilon y' + f = 0}$

3. Étape 2 : élimination des termes linéaires et changement d'origine du repère.

➢ On regroupe les termes en x^2 et x (resp. y^2 et y) pour une mise sous forme canonique.

Par exemple, si $\lambda \neq 0$, on regroupe $\lambda x'^2 + \delta x'$ en le transformant $\lambda x'^2 + \delta x' = \lambda(x'^2 + \dfrac{\delta}{\lambda} x') = \lambda\ (x' + \frac{\delta}{2\lambda})^2 - \frac{\delta^2}{4\lambda}$.

On obtient alors une nouvelle expression de l'équation cartésienne : $\boxed{\lambda(x' + \alpha)^2 + \mu(y' + \beta)^2 + \nu = 0.}$

➢ On change l'origine du repère en notant Ω le point de coordonnées $(-\alpha, -\beta)$ dans le repère $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

Attention, un calcul (lequel ?) sera nécessaire pour avoir les coordonnées de Ω dans $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

En notant (x'', y'') les coordonnées d'un point M dans ce repère, on a alors $\begin{cases} x'' &= x' + \alpha \\ y'' &= y' + \beta \end{cases}$

➢ Conclusion : dans le repère $(\Omega; \vec{u}, \vec{v})$ l'équation de $\mathscr{C}$ est : $\boxed{\lambda x''^2 + \mu y''^2 + \nu = 0.}$

4. Étape 3 : reconnaissance de la conique, allure et éléments caractéristiques.

On est ramené à l'une des formes réduites connues dans un nouveau repère $(\Omega; \vec{u}, \vec{v})$.

Les exemples de référence

Déterminant de A	Nom	équation	paramétrage
$\lambda\mu > 0$	**Ellipse ou cercle**	$\dfrac{x^2}{\alpha^2} + \dfrac{y^2}{\beta^2} = 1$	$\begin{cases} x &= \alpha \cos t \\ y &= \beta \sin t \end{cases}$
(genre ellipse)	point	$\dfrac{x^2}{\alpha^2} + \dfrac{y^2}{\beta^2} = 0$	
	vide	$\dfrac{x^2}{\alpha^2} + \dfrac{y^2}{\beta^2} = -1$	
$\lambda\mu = 0$	**Parabole**	$y^2 = 2px$	$\begin{cases} x &= \dfrac{t^2}{2p} \\ y &= t \end{cases}$
(genre parabole)	une droite	$y = 0$	
	deux droites parallèles	$y = \pm 1$	
$\lambda\mu < 0$	**Hyperbole**	$\dfrac{x^2}{\alpha^2} - \dfrac{y^2}{\beta^2} = 1$	$\begin{cases} x &= \alpha\, \mathrm{ch} t \\ y &= \beta\, \mathrm{sh} t \end{cases}$
(genre hyperbole)	deux droites sécantes	$\dfrac{x^2}{\alpha^2} - \dfrac{y^2}{\beta^2} = 0$	

On se rappellera que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ correspondent à des vecteurs propres de la matrice A. Des cas se distinguent ensuite suivant que les coefficients s'annulent, sont positifs ou négatifs. Plus précisément, on distingue des cas en fonction du signe du déterminant de A. Ce signe traduit le fait que les valeurs propres sont de même signe ou pas, et si l'une d'entre elle est nulle.

Exemple 3

On mène la réduction de la conique suivante $x^2+xy+y^2-\sqrt{2}x+\sqrt{2}y=0$.

➢ Étape 0 : Écriture matricielle : $X^TAX+LX=0$ avec $A=\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & 1\end{pmatrix}$ et $L=\begin{pmatrix}-\sqrt{2} & \sqrt{2}\end{pmatrix}$.

➢ Étape 1 :

➙ Réduction de A : valeurs propres $\frac{1}{2}$ et $\frac{3}{2}$. On choisit $D=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 0\\ 0 & \frac{3}{2}\end{pmatrix}$ et on détermine $P=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$. *Attention, P doit être orthogonale car on veut rester en repère orthonormé, on prend donc une base orthonormée de vecteurs propres de A.*

➙ Nouveau repère (tourné pour éliminer les termes en xy, *faire un dessin*) : $(O;\vec{u},\vec{v})$ avec $\vec{u}(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}})$ et $\vec{v}(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})$. Les coordonnées d'un point M dans ce repère sont notées (x',y').

➙ Nouvelle équation dans le repère $(O;\vec{u},\vec{v})$: $\frac{1}{2}x'^2+\frac{3}{2}y'^2-2x'=0$.

➢ Étape 2 :

➙ On rentre les termes linéaires : $\frac{1}{2}(x'^2-4x')+\frac{3}{2}y'^2=0$ devient $\frac{1}{2}(x'-2)^2+\frac{3}{2}y'^2=2$.

➙ Changement d'origine du repère (em faire un dessin): Ω de coordonnées $(2,0)$ dans $(O;\vec{u},\vec{v})$.

➙ Dans le repère $(\Omega;\vec{u},\vec{v})$, les coordonnées d'un point sont notées (x'',y'') et l'équation devient : $\frac{1}{4}x''^2+\frac{3}{4}y''^2=1$.

➢ Étape 3 :

On reconnaît une ellipse (*la dessiner*). Les axes de symétries sont les droites passant par Ω et dirigées respectivement par $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Coordonnées de Ω dans $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$: $(\sqrt{2},-\sqrt{2})$ (utiliser $X=PX'$ avec $X'=\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$).

Axe focal : $-x+y=0$.

Le demi-grand axe est $a=2$ et le demi-petit axe est $b=\frac{2}{\sqrt{3}}$.

Les sommets sont les points de coordonnées (dans $(O;\vec{u},\vec{v})$) : $(4,0)$, $(0,0)$, $(2,\frac{2}{\sqrt{3}})$ et $(2,-\frac{2}{\sqrt{3}})$,

(dans $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$) : $(2\sqrt{2},-2\sqrt{2})$, $(0,0)$, $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}(1+\sqrt{3},1-\sqrt{3})$ et $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}(-1+\sqrt{3},-1-\sqrt{3})$.