I. PRODUIT SCALAIRE

E désigne un $\mathbb{R}-$espace vectoriel dans ce chapitre.

1. Définition et exemples

Définition 1 : *Produit scalaire*

On appelle **produit scalaire** sur E une application φ de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$ telle que

- φ est bilinéaire : elle est linéaire par rapport à chacune de ses variables.
  $\forall (x,y,z) \in E^2, \forall(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2,\ \varphi(\lambda x + \mu y, z) = \lambda\varphi(x,z) + \mu\varphi(y,z)$ et
  $\varphi(x, \lambda y + \mu z) = \lambda\varphi(x,y) + \mu\varphi(x,z)$,
- φ est symétrique : $\forall (x,y,z) \in E^2,\ \varphi(x,y) = \varphi(y,x)$.
- φ est "définie-positive" : $\forall x \in E,\ \varphi(x,x) \geqslant 0$ et $\varphi(x,x) = 0 \implies x = 0$.

En pratique, pour montrer qu'une application est un produit scalaire sur E, on vérifie qu'elle arrive bien dans $\mathbb{R}$, qu'elle est symétrique et linéaire par rapport à l'une de ses variables (la symétrie donne la deuxième), puis qu'elle est définie-positive.

Notations : on note souvent $(u|v)$ ou $< u, v >$ ou $u \cdot v$ au lieu de $\varphi(u,v)$.

Exemple 1

a. Pour $E = \mathbb{R}^n$, on définit un produit scalaire en posant,
pour $u = (u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n$ et $v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$, $< u, v >= \sum_{i=1}^{n} u_i v_i$.
C'est le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$.

b. Dans $E = \mathbb{R}^2$, posons $\varphi\ :\ (u,v) \mapsto 2u_1v_1 - u_1v_2 - u_2v_1 + 3u_2v_2$. φ est un produit scalaire sur E.

c. Dans $E = M_{n,p}(\mathbb{R})$ avec $(n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2$, on pose $\varphi\ :\ (A,B) \mapsto \mathrm{tr}(A^T B)$.
φ est un produit scalaire sur E. *Retenir que $\varphi(A,A)$ est la somme des carrés des coefficients de A.*

d. Dans $E = C^0([a,b],\mathbb{R})$ où $a < b$ sont des réels.
On pose, pour $f,\ g \in E$, $(f|g) = \int_a^b f(t)g(t)\ dt$. On définit ainsi un produit scalaire sur E.
Retenir que la continuité de f intervient dans la démonstation du caractère "défini".

e. Dans $E = \mathbb{R}[X]$, on pose $\varphi\ :\ (P,Q) \mapsto \int_0^1 \tilde{P}(t)\tilde{Q}(t)\ dt$. On définit ainsi un produit scalaire sur E.
Retenir les arguments attendus pour montrer le caractère "défini" : comment prouve-t-on que le polynôme est nul ?

Définition 2 : Un **espace préhilbertien réel** est un $\mathbb{R}-$espace vectoriel réel muni d'un produit scalaire.

2. Inégalité de Cauchy - Schwarz

Soit E un espace préhilbertien réel. Le produit scalaire est noté $< \cdot, \cdot >$.

Proposition 1 *Inégalité de Cauchy-Schwarz*

a. Pour tout x, y dans E, on a $< x, y >^2 \leqslant < x, x >< y, y >$

b. Il y a égalité dans l'inégalité précédente si et seulement si x et y sont proportionnels.

démo

Remarque 1 : on pourra retenir l'inégalité de Cauchy-Schwarz sous la forme équivalente :
$\forall x, y \in E,\ |< x, y >| \leqslant \|x\|\ \|y\|$.

3. Norme

Soit E un espace préhilbertien réel. Le produit scalaire est noté $<\cdot,\cdot>$.

Proposition 2

L'application $\|\cdot\| : \begin{array}{ccc} E & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sqrt{<x,x>} \end{array}$ vérifie les trois propriétés suivantes :

- $\forall x \in E,\ \|x\| = 0 \implies x = 0$ *(séparation)*,
- $\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall x \in E,\ \|\lambda x\| = |\lambda|\ \|x\|$ *(homogénéité)*,
- $\forall (x,y) \in E^2,\ \|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$ *(inégalité triangulaire)*.

$\|\cdot\|$ est une norme sur E, appelée **norme préhilbertienne**.

Remarque 2 : L'inégalité triangulaire s'appelle aussi l'inégalité de Minkowski et elle a aussi un cas d'égalité : soient $x, y \in E$, $\|x+y\| = \|x\| + \|y\|$ si et seulement si $x = 0$ ou $\exists \lambda \in \mathbb{R}_+,\ y = \lambda x$.

Proposition 3

Soient $x,\ y \in E$,

- *Identités de polarisation* :
  $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + 2 <x,y> + \|y\|^2$,
  $\|x-y\|^2 = \|x\|^2 - 2 <x,y> + \|y\|^2$,
  $\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 = 4 <x,y>$.
- *Identité du parallèlogramme* : $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$.

Définition 3 : On définit la distance associée à la norme euclidienne en posant

$$\forall x,\ y \in E,\ d(x,y) = \|y - x\| .$$

Les propriétés d'une distance sont les suivantes :

- $\forall x, y \in \mathbb{R}^m,\ d(x,y) = d(y,x)$ *Symétrie*
- $\forall x, y \in \mathbb{R}^m,\ d(x,y) = 0 \implies x = y$ *Séparation*
- $\forall x, y, z \in \mathbb{R}^m,\ d(x,z) \leqslant d(x,y) + d(y,z)$ *Inégalité triangulaire*

II. ORTHOGONALITÉ

1. Familles orthonormales

Soit E un $\mathbb{R}-$espace vectoriel muni d'un produit scalaire $<\cdot,\cdot>$.

Définition 4 : Soient u et v deux vecteurs de E.
On dit que u et v sont **orthogonaux** si $<u,v>=0$.
On dit que u est **normé** ou unitaire si $\|u\| = 1$

Exemple 2

- Dans $\mathbb{R}^n$ (muni du produit scalaire canonique), les vecteurs $u = (1,0,0\ldots,0)$ et $v = (0,1,0,\ldots,0)$ sont orthogonaux et ils sont normés.
  L'ensemble des vecteurs orthogonaux à u est $F = \{(x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n \ /\ x_1 = 0\}$.

- Dans $C^0([0,2\pi],\mathbb{R})$ muni du produit scalaire $< u,v >= \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} u(t)v(t)\ dt$, les vecteurs sin et cos sont orthogonaux et unitaires.

Définition 5 :
On appelle **famille orthogonale** de E toute famille de vecteurs deux à deux orthogonaux.
On appelle **famille orthonormale** de E toute famille de vecteurs unitaires et deux à deux orthogonaux.

Proposition 4

Toute famille orthogonale de vecteurs non nuls est une famille libre de E.

démo : Soit $(u_1,\dots,u_p)$ une famille de p vecteurs de E. On veut montrer qu'elle est libre :
soient $\lambda_1,\dots,\lambda_p \in \mathbb{R}$, on suppose que $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} \lambda_i u_i = 0_E$.
On prend le produit scalaire dans l'égalité précédente avec u_1 : $< \displaystyle\sum_{i=1}^{p} \lambda_i u_i, u_1 >= 0$. On a donc, par bilinéarité du produit scalaire, $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} \lambda_i < u_i, u_1 >= 0$.
Or par hypothèse, $< u_i, u_1 >= 0$ pour tout $i \neq 1$, donc dans notre somme, il reste $\lambda_1 < u_1, u_1 >= 0$.
On sait de plus que $< u_1, u_1 > \neq 0$ car $u_1 \neq 0_E$. Donc on a $\lambda_1 = 0$.
On procède de même avec u_i pour montrer que $\lambda_i = 0$, pour tout $i \in [\![2,p]\!]$.
On a donc $\lambda_1 = \dots = \lambda_p = 0$. La famille $(u_1,\dots,u_p)$ est libre.

Proposition 5 *Théorème de Pythagore*

- Soit $(u,v) \in E^2$, x et y sont orthogonaux si et seulement si $\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$.
- Soit $(u_1,\dots,u_p)$ une famille de vecteurs de E.
  Si elle est orthogonale alors $\|\displaystyle\sum_{i=1}^{p} u_i\|^2 = \sum_{i=1}^{p} \|u_i\|^2$.

démo : ➢ on écrit $\|u+v\|^2 =< u+v, u+v >$ et on développe en utilisant les propriétés du produit scalaire.
➢ On montre le deuxième résultat par récurrence sur p.

Exercice 1

Soit $(u_1,\dots,u_p)$ une famille orthonormée de E. Justifier que la famille est libre.
Montrer que pour tout $y \in \mathrm{Vect}(u_1,\dots,u_p)$, on peut écrire $y = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} < y, u_i > \ u_i$.

2. Procédé d'othonormalisation de Gram - Schmidt
Soit E un $\mathbb{R}-$espace vectoriel muni d'un produit scalaire $< \cdot,\cdot >$.

Proposition 6

Soit $(e_1,\dots,e_p)$ une famille libre de E.
Il existe une famille orthonormée $(f_1,\dots,f_p)$ de E telle que
$\forall k \in [\![1,p]\!]$, $\mathrm{Vect}(e_1,\dots,e_k) = \mathrm{Vect}(f_1,\dots,f_k)$.

démo : On construit la famille par récurrence en suivant l'algorithme suivant :

- On pose $f_1 = \dfrac{e_1}{\|e_1\|}$ (possible car $e_1 \neq 0$ puisque la famille (e_i) est libre).
- On pose $g_2 = e_2 - < e_2, f_1 > \ f_1$ (ce vecteur est orthogonal à f_1 et non nul (à justifier)).
  Puis $f_2 = \dfrac{g_2}{\|g_2\|}$. On vérifie que $\mathrm{Vect}(e_1,e_2) = \mathrm{Vect}(f_1,f_2)$.
- On suppose construit les vecteurs f_1, f_2, ... , f_k vérifiant les conditions.
  On pose alors $g_{k+1} = e_{k+1} - \displaystyle\sum_{i=1}^{k} < e_{k+1}, f_i > \ f_i$

(ce vecteur est orthogonal à chacun des f_j pour $j = 1, \dots, k$ et il est non nul (à justifier)).
On pose $f_{k+1} = \dfrac{g_{k+1}}{\|g_{k+1}\|}$ et on vérifie que f_{k+1} remplit toutes les conditions demandées (à justifier à partir des hypothèses sur (e_i)).

Remarque 3 : Pour faciliter les calculs, on peut d'abord construire les vecteurs $g_1, \dots, g_p$ et ne diviser par leur norme qu'à la fin du procédé.

Exercice 2

a. Dans $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique, $u = (1,0,1)$, $v = (1,1,1)$ et $w = (-1,1,0)$. Vérifier que (u, v, w) est une famille libre et l'orthonormaliser par le procédé de Gram-Schmidt.

b. Dans $\mathbb{R}[X]$, muni du produit scalaire $< P, Q > = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\,dt$, orthonormaliser $(1, X, X^2)$.

3. Conséquences en dimension finie

Définition 6 : Un $\mathbb{R}-$espace vectoriel E de dimension finie, muni d'un produit scalaire est appelé **espace euclidien**.
Dans un espace euclidien, une base dont les vecteurs forment une famille orthonormée (resp. orthogonale) est appelée **base orthonormée** (resp. **base orthogonale**).

Proposition 7

Soit E un espace euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E.
On peut construire une base orthonormée $(f_1, \dots, f_n)$ de E telle que
$\forall k \in [\![1, n]\!]$, $\mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_k) = \mathrm{Vect}(f_1, \dots, f_k)$.

démo : découle du procédé de Gram-Schmidt.

Remarque 4 : La matrice de passage entre la base $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ et la base $\mathscr{B}' = (f_1, \dots, f_n)$ est triangulaire supérieure (avec des coefficients positifs sur la diagonale).

Proposition 8

Soit $(e_1, \dots, e_p)$ une famille orthonormée de E, euclidien de dimension n.
Il existe $e_{p+1}, \dots, e_n$ dans E tels que $(e_1, \dots, e_n)$ soit une base orthonormée de E.

démo : on utilise le théorème de la base incomplète et le procédé de Gram-Schmidt. On remarquera que celui-ci ne change pas les premiers vecteurs puisque la famille est déjà orthonormée jusqu'à l'indice p.

Exercice 3

Dans $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique, on pose $F = \mathrm{Vect}((1,0,1), (-1,1,0))$. Trouver une base orthonormée de F et la compléter en une base orthonormée de E.

Proposition 9

Soit E un espace euclidien, muni d'un produit scalaire $< \cdot, \cdot >$ et d'une base $\mathscr{B}$ orthonormée. On note $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$.

a. Pour tout $x \in E$, on a $x = \sum_{i=1}^{n} < x, e_i > e_i$.

b. *Écriture matricielle du produit scalaire*
Soient $x,\ y \in E$, on note $X = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x)$ et $Y = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(y)$.
On a alors $< x, y > = X^T Y = Y^T X$ et $\|x\|^2 = X^T X$.

c. Soit $f \in \mathscr{L}(E)$. La matrice de f dans $\mathscr{B}$ est $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}$ où $a_{ij} = < e_i, f(e_j) >$.

démo

4. Sous-espaces et orthogonalité

Soit E un $\mathbb{R}-$espace vectoriel muni d'un produit scalaire $<\cdot,\cdot>$.

Définition 7 : Soit $x \in E$, soit F un sous-espace vectoriel de E.

- On dit que x est orthogonal à F si $\forall y \in F,\ <x,y>=0$.
- Soient F et G deux sous-espaces d'un $\mathbb{R}-$espace vectoriel E préhilbertien
  On dit que F et G sont **orthogonaux** si tout vecteur de l'un est orthogonal à l'autre :
  $\forall x \in F,\ \forall y \in G,\ <x,y>=0$.
- On définit **l'orthogonal de** F comme l'ensemble des vecteurs orthogonaux à F, il est noté $F^{\perp}$,

$$F^{\perp} = \{x \in E\ /\ \forall y \in F,\ <x,y>=0\}.$$

F et G sont orthogonaux si et seulement si $F \subset G^{\perp}$ et $G \subset F^{\perp}$.

⚠*Attention : F et G sont orthogonaux ne signifie pas que F est l'orthogonal de G.*

Exemple 3

a. On a $E^{\perp} = \{0\}$ et $\{0\}^{\perp} = E$.

b. Dans $\mathbb{R}^2$, muni de son produit scalaire canonique, on note la base canonique (e_1, e_2), $F = \text{Vect}(e_1)$. On vérifie que $F^{\perp} = \text{Vect}(e_2)$.

c. Dans $\mathbb{R}^3$, muni du produit scalaire canonique, on pose $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\ /\ x+y+z=0\}$. Montrer que l'orthogonal de F est $G = \text{Vect}((1,1,1))$.

Proposition 10

Soit F un sous-espace vectoriel de E.

- $F^{\perp}$ est un sous-espace vectoriel de E.
- $F \cap F^{\perp} = \{0\}$ et $F \subset (F^{\perp})^{\perp}$.
- Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Si $F \subset G$ alors $G^{\perp} \subset F^{\perp}$.

démo

Exercice 4 : Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Montrer que $(F+G)^{\perp} = F^{\perp} \cap G^{\perp}$ et $F^{\perp} + G^{\perp} \subset (F \cap G)^{\perp}$.

En pratique, si F est de dimension finie, pour déterminer l'orthogonal de F,
on considère $(e_1, \ldots, e_p)$ une base de F (pas nécessairement orthonormée). Soit $x \in E$.
Si $x \in F^{\perp}$ alors $\forall i \in [\![1,p]\!],\ <x,e_i>=0$. Si $\forall i \in [\![1,p]\!],\ <x,e_i>=0$, alors $x \in F^{\perp}$ (à détailler).
On conclut donc $F^{\perp} = \{x \in E\ /\ \forall i \in [\![1,p]\!],\ <x,e_i>=0\}$.

Proposition 11

Soit E un espace préhilbertien réel. Soit F un sous-espace vectoriel de dimension finie de E.

- L'orthogonal de F est un supplémentaire de F dans E.
  On appelle $F^{\perp}$ le supplémentaire orthogonal de F.
- Si E est aussi de dimension finie, alors on a $\dim F^{\perp} = \dim E - \dim F$.

démo : On sait déjà que $F \cap F^{\perp} = \{0\}$. On note $(e_1, \ldots, e_p)$ une base orthonormée de F.
Soit $x \in E$, en procédant par analyse-synthèse, on prouve que $x = y + z$ avec $y = \sum_{i=1}^{p} <x,e_i>e_i \in F$ et $z = x - y \in F^{\perp}$. Cela

prouve que $F+F^{\perp}=E$.

Remarque 5 :

- Dans le cas où E est de dimension finie : Si $(e_1,\dots,e_p)$ est une base orthonormée de F, complétée en une base orthnormée $(e_1,\dots,e_n)$ de E, alors on a $F^{\perp}=\mathrm{Vect}(e_{p+1},\dots,e_n)$ (en exercice).
- $F^{\perp}$ est le seul supplémentaire G de F tel que F et G sont orthogonaux.
- Si E est de dimension finie, on prouve que $(F^{\perp})^{\perp}=F$ et $(F\cap G)^{\perp}=F^{\perp}+G^{\perp}$ (en exercice, utiliser les dimensions).

Exercice 5 :

a. Dans $\mathbb{R}^2$, on pose $F=\mathrm{Vect}((1,1))$. Déterminer $F^{\perp}$.

b. Dans $\mathbb{R}^3$, on pose $G=\mathrm{Vect}((1,0,1))$. Déterminer $G^{\perp}$.

c. Dans $\mathbb{R}^3$, on pose $H=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\ /\ 2x-y+z=0\}$. Déterminer $H^{\perp}$.

III. PROJECTION ORTHOGONALE

1. Projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie

Soit E un espace préhilbertien réel muni d'un produit scalaire $<\cdot,\cdot>$.

Définition 8 : Soit E un espace préhilbertien réel et F un sous-espace de dimension finie de E.
➢ On appelle **projection orthogonale sur** F la projection vectorielle sur F parallèlement à $F^{\perp}$.
➢ On appelle **symétrie orthogonale par rapport à** F la symétrie par rapport à f parallèlement à $F^{\perp}$.

Remarque 6 : Soit f un sous-espace de dimension finie de E. F et $F^{\perp}$ sont supplémentaires dans E, donc la projection p sur F parallèment à $F^{\perp}$ est bien définie.
On rappelle que $\mathrm{Im}p=F$ et pour tout $x\in E$, $x\in\mathrm{Im}p \iff p(x)=x$.
De plus, pour tout $x\in E$, $x-p(x)\in F^{\perp}$ et $p(x)$ est l'unique élément $y\in F$ tel que $x-y\in F^{\perp}$.

Proposition 12

Soit F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie. On note $(e_1,\dots,e_k)$ une base orthonormée de F et p la projection orthogonale sur F.
Pour tout $x\in E$, on a $p(x)=\sum_{i=1}^{k}<x,e_i>e_i$.

démo

Remarque 7 : Cette propriété donne un moyen de calculer le projeté orthogonal de $x\in E$, sur F lorsque l'on dispose d'une base orthonormée de F. Si on connaît une base $(e_1,\dots,e_k)$ de F qui n'est pas orthonormée, on peut aussi déterminer $y=p(x)$ le projeté orthogonal, en résolvant un système qui traduit le fait que $y-x\in F^{\perp}$: $\forall i\in[\![1,k]\!],\ <y-x,e_i>=0$.

Exercice 6

a. Déterminer l'expression de la projection orthogonale sur $G=\mathrm{Vect}((1,0,1))$ (dans $\mathbb{R}^3$).

b. Dans $\mathbb{R}^3$, on pose $H=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\ /\ 2x-y+z=0\}$. Déterminer la projection orthogonale sur H (on donnera sa matrice dans la base canonique).

c. Dans $E=\mathbb{R}[X]$, muni du produit scalaire $<P,Q>=\int_{-1}^{1}P(t)Q(t)\,dt$.
On pose $F=\mathrm{Vect}(1,X)$ et on note p la projection orthogonale sur F. Déterminer $p(X^2)$ et $p(X^3)$.

d. Soit E de dimension finie et H un hyperplan de E. $H^{\perp}$ est une droite, posons $a \in E$, non nul, qui dirige $H^{\perp}$. La projection orthogonale p sur H est définie par $\forall x \in E,\ p(x) = x - \dfrac{<x,a>}{\|a\|^2} a$.

Proposition 13 *Inégalité de Bessel*

Soit E un espace préhilbertien réel et F un sous-espace de E de dimension finie. Soit $(e_1, \ldots, e_k)$ une base orthonormée de F.
Pour tout $x \in E$, on a $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} <x, e_i>^2 \leqslant \|x\|^2$.

démo : Cette propriété exprime que la norme du projeté orthogonal sur F est inférieure à la norme du vecteur.
On note p la projection orthogonale sur F.
Soit $x \in E$, on a $p(x) = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} <x, e_i> e_i$. Et donc $\|p(x)\|^2 = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} (<x, e_i>)^2$ (travail dans une base orthonormée).
Par ailleurs, on a $x = p(x) + \underbrace{x - p(x)}_{\in F^{\perp}}$, les vecteurs $p(x)$ et $x - p(x)$ sont orthogonaux,
donc $\|x\|^2 = \|p(x)\|^2 + \|x - p(x)\|^2$. Ainsi, on voit que $\|x\|^2 \geqslant \|p(x)\|^2$.

2. Distance à un sous-espace de dimension finie

On travaille toujours dans un espace E préhilbertien réel. On considère F un sous-espace de dimension finie de E.

Définition 9 : *Distance d'un vecteur à un sous-espace vectoriel de dimension finie*
Soit $x \in E$, on appelle distance de x à F et on note $d(x, F)$ le réel $\inf_{y \in F} \|y - x\|$ (s'il existe).

Proposition 14

Soit $x \in E$. On note p la projection orthogonale sur F.
L'application $\begin{array}{ccc} F & \to & \mathbb{R} \\ y & \mapsto & \|y - x\| \end{array}$ admet un minimum qui est atteint uniquement en $p(x)$.
On a donc pour tout $x \in E$, $d(x, F) = \|p(x) - x\|$.

démo : On écrit, pour $y \in F$, $y - x = y - p(x) + p(x) - x$, et on utilise le fait que les vecteurs $y - p(x) \in F$ et $p(x) - x \in F^{\perp}$ sont orthogonaux, pour conclure que $\|y - x\|^2 = \|y - p(x)\|^2 + \|p(x) - x\|^2$. On conclut alors assez facilement !

Exercice 7

a. En dimension finie, on considère H un hyperplan et $a \in E$, non nul, tel que $H^{\perp} = \mathrm{Vect}(a)$ (on dit que a est un vecteur normal à H).
Montrer que pour tout $x \in E$, $d(x, H) = \dfrac{|<x,a>|}{\|a\|}$.

b. Soit $E = \mathbb{R}[X]$, toujours muni de $<P, Q> = \displaystyle\int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\,dt$.
Calculer $\inf_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \displaystyle\int_{-1}^{1} \left(t^3 - (at + b)\right)^2\,dt$.
On pourra d'abord justifier que la quantité cherchée est $(d(X^3, F))^2$ (où $F = \mathrm{Vect}(1, X)$).

IV. MATRICES ORTHOGONALES

1. Définition

On se place dans $M_n(\mathbb{R})$, ensemble des matrices carrées d'ordre n, où $n \in \mathbb{N}^*$ est fixé.

Définition 10 : Soit $M \in M_n(\mathbb{R})$. On dit que M est une matrice **orthogonale** si $M^T\ M = I_n$.
On appelle **groupe orthogonal**, et note $O_n(\mathbb{R})$ ou $O(n)$, l'ensemble des matrices orthogonales de $M_n(\mathbb{R})$.

Proposition 15

Soit $M \in M_n(\mathbb{R})$.
M est une matrice orthogonale si et seulement si $M\ M^T = I_n$.

démo : On utilise la propriété suivante : soit $A \in M_n(\mathbb{R})$, A est inversible si et seulement si il existe $B \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $BA = I_n$. Dans ce cas, B est l'inverse de A. Et donc on a aussi $AB = I_n$.
Utilisons ceci pour $M \in M_n(\mathbb{R})$. $M \in O_n(\mathbb{R}) \iff M^T M = I_n$, donc si M est orthogonale alors M est inversible et $M^{-1} = M^T$, donc on a aussi $MM^T = I_n$.
La réciproque s'obtient en échangeant les rôles.

Remarque 8 : on déduit de ce résultat que :

- M est orthogonale si et seulement si M est inversible d'inverse M^T.
- M est une matrice orthogonale si et seulement si M^T est une matrice orthogonale.

2. Bases orthonormées et matrices orthogonales

Proposition 16

On munit $\mathbb{R}^n$ du produit scalaire canonique. Soit $M \in M_n(\mathbb{R})$, on considère les colonnes C_1, ..., C_n et les lignes L_1,...,L_n de M comme des vecteurs de $\mathbb{R}^n$.
➢ M est orthogonale si et seulement si la famille $(C_1, \dots, C_n)$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$.
➢ M est orthogonale si et seulement si la famille $(L_1, \dots, L_n)$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$.

démo : Les lignes de M^T sont les colonnes de M transposées : ${C_1}^T, \dots, {C_n}^T$.
Lorsque l'on calcule le produit $M^T M$, le coefficient p_{ij} de la ligne i et de la colonne j est égal à ${C_i}^T C_j$. Or, pour $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, ${C_i}^T C_j = < C_i, C_j >$ pour le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$.
Donc $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $p_{ij} = < C_i, C_j >$. On déduit de ceci la première équivalence. La deuxième en découle par transposition.

Proposition 17

Soit E un espace euclidien. Soit $\mathscr{B}$ une base orthonormée de E.
Soit $\mathscr{B}'$ une base de E et P la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$.
$\mathscr{B}'$ est une base orthonormée de E si et seulement si P est une matrice orthogonale.

démo : Les colonnes de P sont les vecteurs C_1, ... , C_n des coordonnées des vecteurs de $\mathscr{B}'$ dans la base $\mathscr{B}$, qui est supposée orthonormée. Si $\mathscr{B}'$ est une base orthonormée de E alors $(C_1, \dots, C_n)$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$, donc P est une matrice orthogonale. Si P est une matrice orthogonale alors ses colonnes forment une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$, ce qui permet d'établir que la base $\mathscr{B}'$ est orthonormée dans E.

Remarque 9 : Réciproquement, toute matrice P orthogonale de $M_n(\mathbb{R})$ peut être considérée comme une matrice de passage entre deux bases orthonormées.

3. Groupe spécial orthogonal

Proposition 18

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$, si A est orthogonale alors $\det A \in \{-1, 1\}$.

démo ⚠La réciproque est *bien sûr* fausse ....

Définition 11 :
On note $SO(n)$ l'ensemble des matrices orthogonales M de $M_n(\mathbb{R})$ telles que $\det M = 1$.

Remarque 10 :

- On oriente l'espace E (à partir de $\mathscr{B}$) en appelant *base directe* toute base $\mathscr{B}'$ telle que $\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}') > 0$ et base indirecte toute base $\mathscr{B}'$ telle que $\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}') < 0$.
- Rappelons que $\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}') = \det(P_{\mathscr{B} \to \mathscr{B}'})$, et que ce déterminant vaut 1 ou -1 pour une base orthonormée. Donc on appelle **base orthonormée directe** de E toute base orthonormée $\mathscr{B}'$ de E telle que $\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}') = 1$
- I_n est dans $SO(n)$,
- $SO(n)$ est stable par produit : $\forall M,\ N \in SO(n),\ MN \in SO(n)$
- $SO(n)$ est stable par passage à l'inverse : $\forall M \in SO(n),\ M^{-1} \in SO(n)$.

V. MATRICES SYMÉTRIQUES RÉELLES

E désigne un espace euclidien dans ce paragraphe.

Définition 12 : Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. On dit que A est une matrice **symétrique** réelle si $A^T = A$.
On note $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques réelles de $M_n(\mathbb{R})$.

Remarque 11 :

- On a vu que l'ensemble $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{R})$ de dimension $\dfrac{n(n+1)}{2}$.
  Rappelez une base de $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$.
- Soit $A \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$, pour tout $(X, Y) \in M_{n,1}(\mathbb{R})$, $< AX, Y >=< X, AY >$,
  car $< AX, Y >= (AX)^T Y = X^T\ A^T\ Y = X^T\ AY =< X, AY >$.
- Soit $A \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ et soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement représenté par A.
  On a $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^n$, $< f(x), y >=< x, f(y) >$.

Proposition 19

Soit A une matrice symétrique réelle.
Les sous-espaces propres de A sont deux à deux orthogonaux.

démo : Soient λ et μ deux valeurs propres distinctes et réelles de A. Notons E_λ et E_μ les sous-espaces propres associés.
Soit $X \in E_\lambda$ et $Y \in E_\mu$, on veut montrer que $< X, Y >= 0$. A est symétrique, donc $< AX, Y >=< X, AY >$, or $AX = \lambda X$ et $AY = \mu Y$.
Donc $\lambda < X, Y >= \mu < X, Y >$ et par conséquent, $(\lambda - \mu) < X, Y >= 0$.
Comme $\lambda \neq \mu$, on en déduit que $< X, Y >= 0$. Donc $\forall X \in E_\lambda,\ \forall Y \in E_\mu,\ < X, Y >= 0$, ce qui prouve que E_λ et E_μ sont orthogonaux.

Proposition 20 *Théorème spectral (Admis)*

Soit A une matrice symétrique réelle de $M_n(\mathbb{R})$. Il existe une matrice orthogonale P et une matrice diagonale réelle D telles que $D = P^{-1}AP$.

Remarque 12 : Quelques conséquences non négligeables,

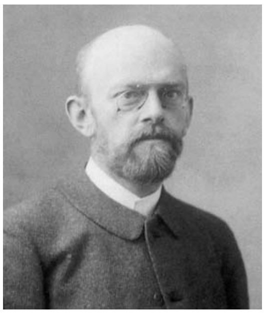
- Si A est symétrique réelle alors elle est diagonalisable dans $M_n(\mathbb{R})$.
- Si A est symétrique réelle de taille n, alors son polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbb{R}$: elle admet n valeurs propres réelles (comptées avec multiplicité).
- Si A est symétrique réelle, alors elle est diagonalisable au moyen d'une matrice (de passage) P orthogonale : $P^{-1} = P^T$ donc $D = P^{-1}AP = P^TAP$.
- Si A est symétrique réelle alors il existe une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ formée de vecteurs propres de A.
- ⚠Ce théorème n'est plus vrai pour une matrice symétrique complexe.

En pratique : si on considère une matrice A symétrique réelle, **on sait grâce au théorème spectral** qu'elle est diagonalisable au moyen d'une **matrice orthogonale**.
➢ Pour obtenir la matrice P, on cherche des bases orthonormées de chacun des sous-espaces propres de A.
➢ Puisque les sous-espaces propres de A sont orthogonaux 2 à 2, en réunissant les bases obtenues, on forme une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$.
➢ La matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^n$ à cette nouvelle base est une matrice P orthogonale et telle que $P^{-1}AP$ est diagonale.

En résumé, diagonaliser une matrice symétrique, c'est chercher une base orthonormée de vecteurs propres. De plus, le calcul de P^{-1} devient immédiat car $P^{-1} = P^T$.

Bessel Friedrich (1784-1846)

Gram Jorgen (1850-1916)



Hilbert David (1862-1943)

Schwarz Hermann (1843-1921)