I. NOTION DE SÉRIE ENTIÈRE

1. Cadre

On considère (a_n) une suite de réels ou de complexes.
On s'intéresse à la série (numérique) $\sum a_n z^n$ pour $z \in \mathbb{C}$ ou $z \in \mathbb{R}$. On parle de série entière $\sum a_n z^n$:

- ➙ cette série converge pour certains z dans un domaine D (de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), contenant 0.
- ➙ on définit alors la fonction $S : z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ sur D, appelée fonction somme de la série.

Dans ce cours, on utilise souvent la propriété suivante :
soient $a,\ b$ deux réels, si $a < b$ alors il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $a < c < b$.

2. Rayon de convergence

Proposition 1 *Lemme d'Abel*

> Soit $z_0 \in \mathbb{C}^*$ tel que la suite $(a_n z_0^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.
> Pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < |z_0|$, la série $\sum a_n z^n$ converge absolument.

démo : La suite $(a_n z_0^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est supposée bornée : il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|a_n z_0^n| \leqslant M$.
Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < |z_0|$ (on suppose que $z_0 \neq 0$). On a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|a_n z^n| \leqslant |a_n z_0^n| \left|\frac{z}{z_0}\right|^n \leqslant M \left|\frac{z}{z_0}\right|^n$.
Or $x = \left|\frac{z}{z_0}\right| \in [0,1[$ donc la série $\sum M x^n$ converge (série géométrique). Par théorème de comparaison des séries à termes réels positifs, on conclut que $\sum a_n z^n$ converge absolument, donc converge.

Proposition 2

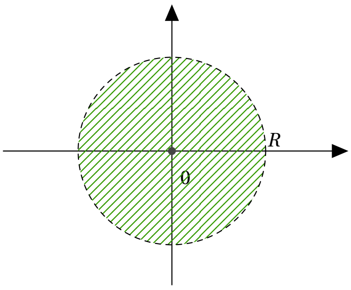
> Soit $\sum a_n z^n$ une série entière. Soit $z_0 \in \mathbb{C}^*$.
> Si $\sum a_n z_0^n$ converge, alors $\sum a_n z^n$ converge absolument pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < |z_0|$.

démo : Le fait que $\sum a_n z_0^n$ converge implique que la suite $(a_n z_0^n)$ converge vers 0 donc est bornée.

> **Définition** 1 : (Propriété)
> Soit $\sum a_n z^n$ une série entière. Il existe un unique élément de $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, noté R tel que,
> - Si $|z| < R$ alors $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ converge (absolument),
> - Si $|z| > R$ alors $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ diverge (grossièrement).
>
> On appelle R le **rayon de convergence** de la série entière.

démo : ➢ Existence : on pose $\mathscr{E} = \{\rho \in \mathbb{R}_+ \ / \ (a_n \rho^n) \text{ est bornée}\}$.
➙ Si cet ensemble est majoré, c'est une partie non vide majorée de $\mathbb{R}$ donc elle admet une borne supérieure R.
On prouve alors le résultat énoncé : prenons $z \in \mathbb{C}$.
Premier cas : $|z| < R$, il existe $\rho \in \mathscr{E}$ tel que $|z| < \rho \leqslant R$ (définition de la borne supérieure d'un ensemble). D'après le lemme d'Abel, appliqué avec $z_0 = \rho$, on peut conclure que la série $\sum a_n z^n$ converge absolument.
Deuxième cas : $|z| > R$, on sait alors que $|z|$ n'est pas dans $\mathscr{E}$ (car ce nombre est plus grand que la borne supérieure de l'ensemble) donc la suite $(a_n |z|^n)$ n'est pas bornée : la série $\sum a_n z^n$ est donc divergente grossièrement (car la suite $(a_n z^n)$ ne tend pas vers 0).
➙ Si cet ensemble n'est pas majoré, on pose $R = +\infty$ et on prouve que la série $\sum a_n z^n$ converge pour tout $z \in \mathbb{C}$.Il suffit pour cela de choisir z_0 tel que $|z_0| > |z|$ et d'appliquer le lemme d'Abel.

➢ Unicité : Si R_1 et R_2 vérifient les conditions énoncées avec $R_1 \neq R_2$, on prend $\rho \in]R_1, R_2[$ (dans le cas $R_1 < R_2$) pour trouver une contradiction. En effet, avec $z = \rho$, on a $|z| < R_2$ donc la série $\sum a_n z^n$ converge absolument et $|z| > R_1$ donc la série $\sum a_n z^n$ diverge grossièrement.



Remarque

a. On a défini R par $R = \sup\{\rho \in \mathbb{R}_+ \ / \ (a_n\rho^n) \text{ est bornée}\}$ (borne supérieure dans $\overline{\mathbb{R}}$).

b. À l'intérieur du **disque de convergence**, la série converge absolument. À l'extérieur la série diverge grossièrement.
Pour $|z| = R$, on ne peut rien dire de général, cela dépend de la série étudiée.

Exemple 1

a. La série $\sum_{n\geqslant 0} z^n$ a pour rayon de convergence 1.
small En effet, on sait que : si $|z| < 1$ *alors la série converge absolument et que si* $|z| > 1$ *alors la série diverge (grossièrement).On en conclut que* $R = 1$ *(c'est la définition du rayon de convergence).*

b. La série $\sum_{n\geqslant 0} \frac{z^n}{n+1}$ a pour rayon de convergence 1 : utiliser le critère de D'Alembert pour le montrer.
On pose pour $z \in \mathbb{C}^*$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \left|\frac{z^n}{n+1}\right|$. On a $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0$. On considère alors $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ pour prouver que cette suite a une limite L et conclure.
On trouve $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+2}{n+1}|z|$ donc $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = |z|$.
D'après le critère de D'Alembert, si $|z| < 1$, la série $\sum u_n$ converge absolument, et si $|z| > 1$ la série diverge grossièrement. Par définition, on conclut que $R = 1$.

c. La série $\sum_{n\geqslant 0} \frac{z^n}{2^n}$ a pour rayon de convergence 2 : utiliser le résultat sur les séries géométriques pour le montrer.

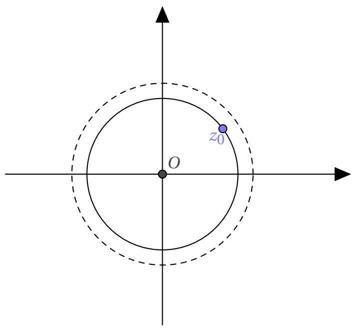
d. La série $\sum_{n\geqslant 0} \frac{z^n}{n!}$ a pour rayon de convergence $+\infty$: utiliser le critère de D'Alembert pour le montrer.

e. La série entière $\sum_{n\geqslant 0} z^{2n}$ a pour rayon de convergence 1.

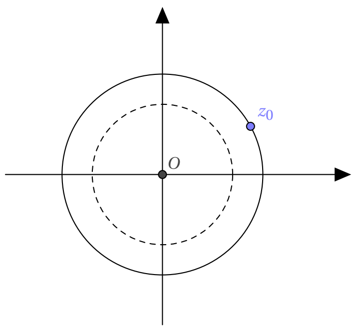
Remarque 1 : Pour chercher le rayon de convergence d'une série $\sum a_n z^n$:

➙ On peut remarquer que c'est le même rayon pour $\sum |a_n| z^n$.

➙ Si $\exists z_0 \in \mathbb{C}^*$ tel que $\sum a_n z_0^n$ CV alors $R \geqslant |z_0|$.



➙ Si $M \in \mathbb{R}_+$ vérifie : $\forall z \in \mathbb{C},\ |z| < M \Longrightarrow \sum a_n z^n$ ACV, alors $M \leqslant R$



➙ Si $\exists z_0 \in \mathbb{C}^*$ tel que $\sum a_n z_0^n$ DV alors $R \leqslant |z_0|$.

Comparaison des rayons de deux séries

Proposition 3

Soit $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières. Soit R_a et R_b leurs rayons respectifs.

- Si $\forall n \in \mathbb{N},\ |a_n| \leqslant |b_n|$ alors $R_b \leqslant R_a$.
- Si $|a_n| \sim |b_n|$ alors $R_a = R_b$.

démo On s'appuie sur les théorèmes de comparaison pour les séries numériques et sur la définition de rayon de convergence.

➢ On suppose que $\forall n \in \mathbb{N},\ |a_n| \leqslant |b_n|$ (l'inégalité peut n'être vraie qu'à partir d'un certain rang sans changer la démo).
Prenons $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| \leqslant R_b$. On sait alors que la série $\sum b_n z^n$ converge absolument.
Or $\forall n \in \mathbb{N}, |a_n z^n| \leqslant |b_n z^n|$ donc par théorème de comparaison sur les séries numériques à termes positifs, on conclut que la série $\sum a_n z^n$ converge absolument.
Ainsi, pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < R_b$, $\sum a_n z^n$ converge absolument : on peut en déduire que $R_a \geqslant R_b$ (voir remarque ci-dessus avec M et R).

➢ Le deuxième point s'obtient de la même manière avec le théorème de comparaison par équivalence.

3. Opération sur les séries entières

Proposition 4 *Produit par un scalaire*

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}$.
Les séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum \lambda a_n z^n$ ont le même rayon de convergence, et dans le disque de convergence, on a $\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda a_n z^n = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$.

Proposition 5 *Somme*

Soit $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières. Soit R_a et R_b leurs rayons respectifs.
On note enfin R le rayon de la série entière $\sum (a_n + b_n) z^n$.
Alors on a $R \geqslant \min(R_a, R_b)$ et si $R_a \neq R_b$ alors $R = \min(R_a, R_b)$.
Et pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < min(R_a, R_b)$, on a $\sum_{n=0}^{+\infty} (a_n + b_n) z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n + \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$.

Proposition 6 *Produit de Cauchy*

Soit $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières. Soit R_a et R_b leurs rayons respectifs.
On pose pour tout $n \in \mathbb{N},\ c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$.
Le rayon R de la série entière $\sum c_n z^n$ vérifie $R \geqslant \min(R_a, R_b)$.
Pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < min(R_a, R_b)$, on a $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n = (\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n)(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n)$.

Proposition 7

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon R.

- Les séries $\sum a_n z^{n+1}$ et $\sum_{n \geqslant 1} a_n z^{n-1}$ ont pour rayon R.
- Les séries $\sum n a_n z^n$ et $\sum \frac{a_n}{n+1} z^n$ ont pour rayon R.

démo ➢ Fixons $z \in \mathbb{C}$ et considérons $v_n = |a_n z^{n+1}|$. On a $v_n = |z| \underbrace{|a_n z^n|}_{u_n}$.

On peut donc affirmer, grâce aux résultats sur les séries que $\sum v_n$ converge si et seulement si $\sum u_n$ converge.
Cela permet de conclure que les séries entières ont le même rayon de convergence car les séries numériques à z fixé convergent ou divergent pour les mêmes z.
Le raisonnement est le même avec $w_n = a_n z^{n-1}$ en remarquant que pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, $w_n = \dfrac{1}{|z|} u_n$.
➢ Notons R_0 le rayon de la série entière $\sum n a_n z^n$.
On remarque d'abord que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|a_n| \leqslant |n a_n|$, donc $R_0 \leqslant R$.
Il reste à prouver que $R \leqslant R_0$. Pour cela prenons $\rho \in \mathbb{R}_+^*$ et $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < \rho < R$ (cela n'est possible que pour $R \neq 0$ mais si $R = 0$, on a fini !).
On écrit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|n a_n z^n| = n \left(\dfrac{|z|}{\rho}\right)^n a_n \rho^n$.
Puisque $0 \leqslant \dfrac{|z|}{\rho} < 1$, on sait que $\left(n\left(\dfrac{|z|}{\rho}\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, par un réel M positif.
C'est un résultat de croissance comparée : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{a^n} = 0$ *si* $a > 1$ *donc* $\lim\limits_{n\to+\infty} n b^n = 0$ *pour* $0 < b < 1$.
Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $|n a_n z^n| \leqslant M\, a_n \rho^n$. Or $\sum a_n \rho^n$ converge car $\rho < R$. Donc $\sum n a_n z^n$ converge absolument.
Ainsi, $\forall z \in \mathbb{C}$, $|z| < R \implies \sum n a_n z^n$ converge absolument. Cela prouve que $R \leqslant R_0$.

II. SOMME D'UNE SÉRIE ENTIÈRE D'UNE VARIABLE RÉELLE

1. Cadre réel

On considère (a_n) une suite de réels ou de complexes.
On s'intéresse à la série entière $\sum a_n x^n$ pour $x \in \mathbb{R}$.
On note R le rayon de convergence de la série entière. $]-R, R[$ est l'**intervalle de convergence**.
On appelle (fonction) **somme** de la série entière l'application définie, sur $]-R, R[$, par $S : x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. C'est une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ (suivant que la suite (a_n) est dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ ou $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$).

Exemple 2

a. La série entière $\sum x^n$ a pour rayon de convergence 1. La fonction somme associée est
$S : \begin{array}{ccc}]-1,1[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sum\limits_{n=0}^{+\infty} x^n \end{array}$. On peut montrer que $\forall x \in]-1,1[$, $S(x) = \dfrac{1}{1-x}$.

b. Soit $\theta \in \mathbb{R}$ fixé. La série entière $\sum e^{in\theta} x^n$ a pour rayon de convergence 1. La fonction somme associée est
$S : \begin{array}{ccc}]-1,1[& \to & \mathbb{C} \\ x & \mapsto & \sum\limits_{n=0}^{+\infty} e^{in\theta} x^n \end{array}$. On peut montrer que $\forall x \in]-1,1[$, $S(x) = \dfrac{1}{1-e^{i\theta} x}$.

c. La série entière $\sum (-1)^n x^{2n}$ a pour rayon de convergence 1. La fonction somme associée est
$S : \begin{array}{ccc}]-1,1[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sum\limits_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n} \end{array}$. On peut montrer que $\forall x \in]-1,1[$, $S(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.

d. La série entière $\sum n x^n$ a pour rayon de convergence 1. La fonction somme associée est
$S : \begin{array}{ccc}]-1,1[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sum\limits_{n=0}^{+\infty} n x^n \end{array}$. Peut-on donner une expression simple de $S(x)$ pour $x \in]-1,1[$?

2. Continuité

Soit une série entière $\sum a_n x^n$ de rayon de convergence R.

Proposition 8 *(Admis)*

> La fonction somme $S : x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est continue sur $]-R, R[$.

Remarque 2 :

Le résultat suivant est hors programme mais il répond à une question naturelle : que dire en R et $-R$?
Si la série $\sum a_n R^n$ (resp. $\sum a_n(-R)^n$) est convergente, alors la fonction somme est prolongeable par continuité en R (resp. en $-R$).

3. Dérivation

Proposition 9 *(Admis)*

> Soit une série entière $\sum a_n x^n$ de rayon de convergence R.
> La série $\sum\limits_{n\geqslant 1} n a_n x^{n-1}$ admet pour rayon R.
> La fonction somme S est dérivable sur $]-R,R[$ et $\forall x \in]-R,R[,\ S'(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$.

On déduit de ce premier théorème :

Proposition 10

> Soit une série entière $\sum a_n x^n$ de rayon de convergence R.
> Sa fonction somme S est de classe C^∞ sur $]-R,R[$ et
> $$\forall k \in \mathbb{N},\ a_k = \frac{S^{(k)}(0)}{k!}.$$

démo : on démontre par récurrence sur k que S est de classe C^k pour tout $k \in \mathbb{N}$,
et que $\forall x \in]-R,R[,\ S^{(k)}(x) = \sum\limits_{n=k}^{+\infty} n(n-1)\dots(n-k+1)a_n x^{n-k}$.

Exemple 3

$S\ :\ x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} x^n$ est définie sur $]-1,1[$.

➢ S est dérivable sur cet intervalle et $\forall x \in]-1,1[,\ S'(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1}$.

On sait de plus que sur $]-1,1[$, S coincide avec la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$. Les dérivées de ces deux fonctions sont égales sur $]-1,1[$, donc $\forall x \in]-1,1[,\ \sum\limits_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1} = \dfrac{1}{(1-x)^2}$.

➢ S est de classe C^∞. Dérivez encore une fois pour obtenir une expression simple de $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} n(n-1)x^{n-2}$, valable pour tout $x \in]-1,1[$.

➢ Utiliser ce qui précède pour donner une expression simple de la somme des séries entières (en précisant le rayon de convergence et donc sur quel intervalle la somme est définie) : $\sum\limits_{n\geqslant 0} n x^n$ et $\sum\limits_{n\geqslant 0} n(n-1)x^n$.

➢ Reproduire le même type de raisonnement pour obtenir le rayon de convergence et un expression simple des sommes de séries entières suivantes :

➙ $\sum\limits_{n\geqslant 0} (n+1)x^n$ ➙ $\sum\limits_{n\geqslant 0} n^2 x^{n-1}$.

4. Intégration

Proposition 11 *(Admis)*

> Soit une série entière $\sum a_n x^n$ de rayon de convergence R.
> La série entière $\sum \dfrac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ admet pour rayon R.
> La fonction $F\ :\ x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ est la primitive de S sur $]-R,R[$ qui s'annule en 0.

Exemple 4

- Le rayon de convergence de la série $\sum x^n$ est 1.
  La fonction $S\,:\,x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$ est continue sur $]-1,1[$.
  On peut donc affirmer que $\sum \frac{x^{n+1}}{n+1}$ admet un rayon de convergence égal à 1 et que S admet pour primitive sur $]-1,1[$ la fonction $F\,:\,x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}$.
  F est l'unique primitive de S s'annulant en 0. Or S coincide avec la fonction $x \mapsto \frac{1}{1-x}$ sur $]-1,1[$ et $x \mapsto -\ln(1-x)$ en est une primitive s'annulant en 0. Par unicité de la primitive s'annulant en 0 pour cette fonction, on conclut que $\boxed{\forall x \in]-1,1[,\ \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = -\ln(1-x)}$.
- Par un raisonnement similaire, montrer que $\sum \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1}$ admet un rayon de convergence égal à 1 et que $\forall x \in]-1,1[,\ \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1} = \ln(1+x)$.
- En déduire que la série entière $\sum \frac{(-1)^n}{n+1} x^{2n+2}$ admet un rayon de convergence égal à 1 et que $\forall x \in]-1,1[,\ \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{2n+2} = \ln(1+x^2)$.
- Montrer que la série entière $\sum \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$ admet un rayon de convergence égal à 1 et que $\forall x \in]-1,1[,\ \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} = \arctan(x)$.

III. FONCTIONS DÉVELOPPABLES EN SÉRIES ENTIÈRES AUTOUR DE 0

1. Définition

Définition 2 : Soit $f\,:\,I \to \mathbb{K}$ où I est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ contenant 0.
On dit que f est développable en série entière autour de 0 s'il existe une série entière $\sum a_n x^n$ de rayon de convergence $R \neq 0$ et un réel $r \in]0,R[$ tels que $\forall x \in]-r,r[,\ f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

Aurement dit, f est DSE(0) s'il existe un voisinage de 0 sur lequel f coincide avec une somme de série entière.

Exemple :

- $f\,:\,x \mapsto \frac{1}{1-x}$ est DSE autour de 0 car $\forall x \in]-1,1[,\ f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$.
- $f\,:\,x \mapsto \ln(1+x)$ est DSE autour de 0 car $\forall x \in]-1,1[,\ f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1}$.
- $f\,:\,x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ est DSE autour de 0 car $\forall x \in]-1,1[,\ \frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n}$.
- $f\,:\,x \mapsto \arctan x$ est DSE autour de 0 car $\forall x \in]-1,1[,\ \arctan x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$.

Proposition 12

Soit f une fonction DSE autour de 0, et $\sum a_n x^n$ la série dont f est la somme sur $]-r,r[$.

- f est de classe C^∞ sur $]-r,r[$.
- Les coefficients a_n sont uniquement déterminés par $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$.

On dit que le développement en série entière de f est unique.

démo : Il existe un voisinage $]-r,r[$ de 0 tel que $\forall x \in]-r,r[,\ f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. On note R le rayon de convergence de la série entière.

Or on sait que la fonction $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe C^∞ sur $]-R, R[$, donc sur $]-r, r[$.

De plus, $\forall n \in \mathbb{N},\ S^{(n)}(0) = n! a_n$. Le résultat annoncé s'ensuit car $S = f$ sur $]-r, r[$.

2. Opérations

Proposition 13

> Soient $f,\ g$ deux fonctions DSE(0). Soit $\lambda \in \mathbb{K}$.
> Les fonctions λf, $f+g$ et fg sont DSE(0).

démo à écrire en entrainement

3. Fonctions usuelles

a. Fonctions du type $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$ et leurs primitives

- $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$ est DSE(0) et $\forall x \in]-1,1[,\ \dfrac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$.
- $x \mapsto \dfrac{1}{1-x^2}$ est DSE(0) et $\forall x \in]-1,1[,\ \dfrac{1}{1-x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^{2n}$.
- $x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$ est DSE(0) et $\forall x \in]-1,1[,\ \dfrac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n}$.

Par intégration, on obtient

- $x \mapsto \ln(1-x)$ est DSE(0) et $\forall x \in]-1,1[,\ \ln(1-x) = -\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$.
- $x \mapsto \ln(1+x)$ est DSE(0) et $\forall x \in]-1,1[,\ \ln(1+x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$.
- $x \mapsto \arctan x$ est DSE(0) et $\forall x \in]-1,1[,\ \arctan(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}$.

b. Fonctions du type $x \mapsto e^x$

- $x \mapsto e^x$ est DSE(0) et $\forall x \in \mathbb{R},\ e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x^n}{n!}$.
- $x \mapsto \mathrm{ch} x$ est DSE(0) et $\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{ch} x = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x^{2n}}{(2n)!}$.
- $x \mapsto \mathrm{sh} x$ est DSE(0) et $\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{sh} x = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$.

c. Fonctions trigonométriques

- $x \mapsto \cos x$ est DSE(0) et $\forall x \in \mathbb{R},\ \cos x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \dfrac{x^{2n}}{(2n)!}$.
- $x \mapsto \sin x$ est DSE(0) et $\forall x \in \mathbb{R},\ \sin x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$.

d. Fonctions du type $x \mapsto (1+x)^\alpha$ où $\alpha \in \mathbb{R}$

- $x \mapsto (1+x)^\alpha$ est DSE(0) et $\forall x \in]-1,1[,\ (1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n$.
- $x \mapsto \sqrt{1+x}$ est DSE(0) et $\forall x \in]-1,1[,\ \sqrt{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{n-1} \dfrac{3 \times 5 \times \cdots \times (2n-3)}{2^n\ n!} x^n$.
- $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$ est DSE(0) et $\forall x \in]-1,1[,\ \dfrac{1}{\sqrt{1+x}} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \dfrac{3 \times 5 \times \cdots \times (2n-1)}{2^n\ n!} x^n$.

Remarque 3 : Le développement de la fonction exponentielle (et des fonctions cosinus et sinus) se démontre au moyen de la formule de Taylor avec reste intégrale. Le développement de $x \mapsto (1+x)^\alpha$ se démontre grâce à la méthode de l'équation différentielle.

IV. EXPONENTIELLE COMPLEXE

Proposition 14

La série entière complexe $\sum_{n \geqslant 0} \frac{z^n}{n!}$ est de rayon infini.

Définition 3 : Sa somme est appelée fonction exponentielle complexe, et notée exp.

$$\forall z \in \mathbb{C},\ e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

Proposition 15

Pour tout $(z, z') \in \mathbb{C}^2$, $e^z \times e^{z'} = e^{z+z'}$

démo : Avec un produit de Cauchy et la formule du binôme de Newton.

Proposition 16

La fonction exp vérifie

- $t \mapsto e^{it}$ est surjective de $\mathbb{R}$ sur le cercle unité et $\forall t \in \mathbb{R},\ e^{it} = \cos t + i \sin t$,
- pour $z = x + iy$ avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $e^z = e^x \times e^{iy}$,
- $\forall z \in \mathbb{C}$, $e^z \neq 0$ et $\frac{1}{e^z} = e^{-z}$,
- Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $e^{\overline{z}} = \overline{e^z}$ et $|e^z| = e^{\mathrm{Re}(z)}$ et $\arg(e^z) = \mathrm{Im}(z)$,
- La fonction exp est $2i\pi$−périodique et $\forall z \in \mathbb{C},\ e^z = 1 \iff z \in 2i\pi\mathbb{Z}$.

démo : pour le premier point, utiliser les développements en série entière des fonctions exp, cos et sin.

Annexe : Séries entières et résolution d'équations différentielle

On cherche les solutions d'une équation différentielle linéaire, d'ordre 1 ou 2 (voire plus), sous forme d'une fonction somme de série entière.

Démarche :
➢ Poser y comme la fonction somme d'une série entière $\sum a_n x^n$ de rayon R supposé non nul.
➢ Utiliser le théorème de dérivation, pour affirmer que y est de classe C^1 et exprimer y'.
➢ Injecter les expressions de y et y' dans l'équation différentielle, puis regrouper les sommes (éventuellement en les réindexant, en écartant les termes extrêmes de certaines sommes, etc.) de manière à se ramener à $\sum_{n=\dots}^{+\infty} b_n x^n$.
Identifier les coefficients de la série entière avec ceux du second membre (parfois nul, parfois égal à un polynôme) par unicité des coefficients d'une série entière.
➢ On obtient ainsi une équation de récurrence linéaire sur les coefficients de la série. On en déduit une expression de a_n en fonction de n (et de a_0, a_1 éventuellement).
➢ On vérifie alors que la série obtenue a bien un rayon R non nul. Sa fonction somme est une solution de notre équation sur $]-R,R[$.
Il s'agit d'une démarche par analyse-synthèse : si une fonction-somme de série entière convient alors quels sont ses coefficients ? La synthèse consiste, au dernier point, à vérifier que la fonction-somme ainsi obtenue à un rayon non nul et donc que c'est une fonction définie sur un domaine non réduit à $\{0\}$.

➢ <u>Première situation</u> : On connaît une fonction f définie sur un intervalle I. On cherche si elle est développable en série entière. On commence par trouver une équation différentielle linéaire dont elle est solution et on calcule $f(0)$ (en général).
On applique la méthode de recherche de solution somme de série entière sur l'équation différentielle, en exploitant la condition initiale $y(0) = f(0)$. On trouve une fonction S, somme de série entière $\sum a_n x^n$.
Par unicité des solutions d'un problème de Cauchy, on conclut que f est DSE(0) et on connaît les coefficients du développement.

Exemple 5 : *Chercher un DSE(0) de $f : x \mapsto (1+x)^\alpha$ pour $\alpha \in \mathbb{R}$ fixé avec la méthode de l'équation différentielle.*

➙ f est de classe C^1 et $\forall x \in]-1,+\infty[,\ f'(x) = \dfrac{\alpha}{1+x} f(x)$. Donc f est solution de $y' = \dfrac{\alpha}{1+x} y$. De plus $f(0) = 1$, la condition initiale sera donc $y(0) = 1$.
➙ On trouve une solution somme de série entière $\sum a_n x^n$ avec la relation $\forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+1} = \dfrac{\alpha - n}{n+1} a_n$. La condition initiale impose $a_0 = 1$.
➙ On en déduit $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = \dfrac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}$ par récurrence.
➙ On cherche le rayon de convergence de la série entière obtenue : il vaut $R = 1$.
➙ On conclut, par unicité de la solution à un problème de Cauchy, que f coincide sur $]-1,1[$ avec la solution somme de série entière trouvée.
Donc, $\forall x \in]-1,1[,\ f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n$.

➢ <u>Deuxième situation</u> : On doit résoudre une équation différentielle donnée.
On cherche une solution somme de série entière et on obtient une fonction S sur un intervalle $]-R,R[$ (R rayon de la série). On reconnaît alors un DSE(0) usuel, ce qui permet d'obtenir une expression simple de S.

Exemple 6 : *Trouver une solution développable en série entière de l'équation différentielle :* $2xy'' + y' - y = 0$.

Voici les résultats que l'on obtient ici :
➢ La relation de récurrence linéaire vérifiée par les coefficients : $\forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+1} = \dfrac{1}{(2n+1)(n+1)} a_n$.

➢ Par récurrence, on a donc $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = \dfrac{1}{(2n-1)(2n-3)\dots 3\times n(n-1)\dots 2\times 1}a_0$, ce qui s'écrit aussi $a_n = \dfrac{2^n}{(2n)!}a_0$.

➢ On vérifie que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0}\dfrac{2^n}{(2n)!}x^n$ a un rayon non nul. Ce rayon est en fait infini.

Donc la fonction $f\ :\ x\mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{2^n}{(2n)!}x^n$ est une solution de notre équation différentielle sur $\mathbb{R}$.

➢ On peut alors chercher à reconnaître dans la fonction somme un DSE usuel.

Pour $x>0$, on peut écrire $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{(2x)^n}{(2n)!}=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{(\sqrt{2x})^{2n}}{(2n)!}=\mathrm{ch}(\sqrt{2x})$.

Pour $x<0$, on écrit $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{(2x)^n}{(2n)!}=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n(\sqrt{-2x})^{2n}}{(2n)!}=\cos(\sqrt{-2x})$. $\boxed{\text{On a donc } f\ :\ x\mapsto \begin{cases}\mathrm{ch}(\sqrt{2x}) & \text{si } x>0\\ \cos(\sqrt{-2x}) & \text{si } x\leqslant 0\end{cases}}$

Cette fonction est une solution de l'équation sur chacun des intervalles $]-\infty,0[$ et $]0,+\infty[$.

Exercice 1 *Un grand classique*

Soit $f\ :\ x\mapsto e^{-x^2}$ et $F\ :\ x\mapsto \displaystyle\int_0^x e^{-t^2}\,dt$.

Soit g la fonction définie pour tout $x\in\mathbb{R}$, par $g(x)=e^{x^2}F(x)$.

1. Justifier (en citant le théorème utilisé) que F est bien définie sur $\mathbb{R}$ et de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. Étudier la parité de F.

2. Montrer que la fonction f est développable en série entière sur $\mathbb{R}$ et donner son développement.

3. **a.** Montrer que F est développable en série entière sur $\mathbb{R}$. On citera précisément le théorème utilisé.

b. Donner le développement en série entière de F sur $\mathbb{R}$.

4. On considère l'équation différentielle (E) suivante : $y'-2xy=1$.
On désire déterminer les solutions de (E) développables en série entière et s'annulant en 0, puis en déduire que g est développable en série entière sur $\mathbb{R}$.

a. Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R>0$ dont la somme sur l'intervalle $]-R,R[$ est notée y. En supposant que y est solution de (E) sur l'intervalle $]-R,R[$ et que $a_0=0$, montrer que $a_1=1$ et que, pour tout $n\geqslant 1$: $a_{n+1}=\dfrac{2}{n+1}a_{n-1}$.

b. En déduire que, pour tout entier naturel n, $a_{2n}=0$ et $a_{2n+1}=\dfrac{2^{2n}n!}{(2n+1)!}$.

c. Réciproquement, on considère la série entière $\sum\dfrac{2^{2n}n!}{(2n+1)!}x^{2n+1}$. Calculer son rayon de convergence. En déduire que sa somme est solution de (E) sur $\mathbb{R}$ et s'annule en 0.

d. Déduire de ce qui précède que g est développable en série entière sur $\mathbb{R}$. Donner son développement. On citera précisément le théorème utilisé.