L'espace est muni de sa structure affine usuelle : cela signifie que l'on dispose de points, de vecteurs, d'un produit scalaire, d'un produit mixte, et du produit vectoriel de deux vecteurs. De plus, l'espace est orienté.

On se place dans un repère orthonormé direct $\mathscr{R} = (O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$.

I. Plans, droites et cercles

1. Plans

a. *Définitions et vocabulaire*

Définition 1 : Soit $A \in \mathscr{E}$ et $\vec{u}$, $\vec{v}$ deux vecteurs non colinéaires.
On appelle **plan affine** passant par A et dirigé par $\vec{u}$ et $\vec{v}$ l'ensemble des points M de $\mathscr{E}$ tels que $\overrightarrow{AM}$, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont coplanaires.

Définition 2 : Un vecteur est dit **normal** à un plan $\mathscr{P}$ si et seulement si il est orthogonal à tout vecteur de $\mathrm{Vect}(\vec{u},\vec{v})$.

Remarque 1 :

➙ La direction $\vec{P}$ de $\mathscr{P}$ est un plan vectoriel : c'est l'ensemble des vecteurs coplanaires à $\vec{u}$ et $\vec{v}$, noté $\mathrm{Vect}(\vec{u},\vec{v})$. $(\vec{u},\vec{v})$ est une base de la direction de $\mathscr{P}$, on dira que c'est une base du plan.

➙ On peut noter $\mathscr{P} = A + \mathrm{Vect}(\vec{u},\vec{v})$.
On peut aussi utiliser : $\mathrm{Vect}(\vec{u},\vec{v}) = \{s\vec{u} + t\vec{v},\ (s,t) \in \mathbb{R}^2\}$.

➙ On utilisera l'équivalence suivante : $M \in \mathscr{P} \iff \exists (s,t) \in \mathbb{R}^2,\ \overrightarrow{AM} = s\vec{u} + t\vec{v}$.

➙ On ne peut pas définir une orientation naturelle de tous les plans de l'espace. Pour chaque plan, on peut définir une orientation liée à l'orientation de l'espace et à la donnée d'un vecteur normal à ce plan.

➙ Le vecteur $\vec{u} \wedge \vec{v}$ est un vecteur normal au plan $\mathscr{P}$, dirigé par $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Définition 3 :
• Deux plans sont dits **parallèles** si ils sont dirigés par un même plan vectoriel.
Cela équivaut à dire qu'ils ont un même vecteur normal non nul.
• Deux plans sont dits **orthogonaux** si ils ont des vecteurs normaux orthogonaux entre eux.

b. *Équations paramétriques*

Le plan passant par $A(x_A, y_A, z_A)$ et dirigé par les vecteurs $\vec{u}(\alpha_1,\beta_1,\gamma_1)$ et $\vec{v}(\alpha_2,\beta_2,\gamma_2)$ non colinéaires admet pour équations paramétriques :

$$\begin{cases} x = x_A + s\alpha_1 + t\alpha_2 \\ y = y_A + s\beta_1 + t\beta_2, \qquad (s,t) \in \mathbb{R}^2 . \\ z = z_A + s\gamma_1 + t\gamma_2 \end{cases}$$

c. *Équations cartésiennes*

Proposition 1

• Tout plan $\mathscr{P}$ admet une équation cartésienne dans $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ de la forme $ax + by + cz + d = 0$ avec $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ et $(a,b,c) \neq (0,0,0)$.
Le vecteur de coordonnées (a,b,c) est alors un vecteur normal à $\mathscr{P}$.
• Réciproquement, toute équation de ce type est l'équation d'un plan orthogonal au vecteur de coordonnées (a,b,c).

$\boxed{\text{En pratique}}$, pour trouver une équation cartésienne d'un plan

• défini par un point A et sa direction $\text{Vect}(\vec{u}, \vec{v})$, on écrit

$$M(x, y, z) \in \mathcal{P} \iff \left[\vec{u}, \vec{v}, \overrightarrow{AM}\right] = 0$$

• défini par un point A et un vecteur normal $\overrightarrow{n}$, on écrit

$$M(x, y, z) \in \mathcal{P} \iff \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{n} = 0$$

• défini par trois points non alignés A, B et C, on écrit

$$M(x, y, z) \in \mathcal{P} \iff \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AM}\right] = 0 \quad \text{ou} \quad M(x, y, z) \in \mathcal{P} \iff (\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AM} = 0$$

2. Droites

a. *Définitions et vocabulaire*

Définition 4 : Soient $A \in \mathcal{E}$ et $\overrightarrow{u}$ un vecteur non nul.
On appelle **droite affine** passant par A et dirigée par $\overrightarrow{u}$ l'ensemble des points M de $\mathcal{E}$ tels que $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{u}$ sont colinéaires. On la note $(A; \overrightarrow{u})$.

Remarque 2 :

➙ La direction $\overrightarrow{D}$ de $\mathcal{D}$ est une droite vectorielle : c'est l'ensemble des vecteurs colinéaires à $\vec{u}$.
Tout vecteur non nul de $\overrightarrow{D}$ est un **vecteur directeur** de $\mathcal{D}$.

➙ On note aussi : $(A; \overrightarrow{u}) = \{A + t\overrightarrow{u},\ t \in \mathbb{R}\}$.
On utilisera l'équivalence suivante : $\boxed{M \in (A; \vec{u}) \iff \exists t \in \mathbb{R},\ \overrightarrow{AM} = t\vec{u}}$.

b. *Équations paramétriques*

La droite passant par $A(x_A, y_A, z_A)$ et dirigée par le vecteur $\vec{u}(\alpha, \beta, \gamma)$ non nul admet pour **équations paramétriques** :

$$\begin{cases} x = x_A + t\alpha \\ y = y_A + t\beta \\ z = z_A + t\gamma \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

c. *Équations cartésiennes*

Proposition 2

Soient $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ non parallèles. Soient $\overrightarrow{n_1}$ et $\overrightarrow{n_2}$ des vecteurs normaux de $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$.
L'intersection de $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ est une droite dirigée par $\overrightarrow{n_1} \wedge \overrightarrow{n_2}$.

démo : • commençons par montrer que $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2$ est non vide.
On note $a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ et $a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$ des équations cartésiennes de $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$.
Les vecteurs $\overrightarrow{n_1}$ et $\overrightarrow{n_2}$ de coordonnées (a_1, b_1, c_1) et (a_2, b_2, c_2) ne sont pas colinéaires (*pourquoi ?*).
Donc le vecteur $\overrightarrow{n_1} \wedge \overrightarrow{n_2}$ est non nul. L'une de ses composantes est donc non nulle, supposons que la première est non nulle : $\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} \neq 0$. Cherchons maintenant un point $M(x, y, z)$ dans $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2$:

$$M(x, y, z) \in \mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 \iff \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \end{cases}$$

On pose $x = 0$ et on considère le système d'inconnue (y, z) : $\begin{cases} b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ b_2y + c_2z + d_2 = 0 \end{cases}$.
Ce système admet une solution (y_0, z_0) (*pourquoi ?*). Le point A de coordonnées $(0, y_0, z_0)$ est donc dans $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2$.

• Montrons que $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2$ est une droite. Soit M de coordonnées (x, y, z).

$$\begin{aligned} M(x,y,z) \in \mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 &\iff \overrightarrow{AM} \text{ est orthogonal à } \overrightarrow{n_1} \text{ et } \overrightarrow{n_2}, \\ &\iff \overrightarrow{AM} \text{ est colinéaire à } \overrightarrow{n_1} \wedge \overrightarrow{n_2}. \end{aligned}$$

$\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2$ est donc la droite passant par A et dirigée par $\overrightarrow{n_1} \wedge \overrightarrow{n_2}$. □

Proposition 3

Toute droite possède un **système d'équations cartésiennes** de la forme

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \end{cases}$$

avec $a_1, b_1, c_1, d_1, a_2, b_2, c_2, d_2$ des réels et (a_1, b_1, c_1) et (a_2, b_2, c_2) non proportionnels.
Réciproquement, tout système d'équations cartésiennes de cette forme décrit une droite.

démo : • soit $\mathcal{D}$ une droite passant par A, dirigée par $\vec{u}$ unitaire. On choisit $\vec{v}$ et $\vec{w}$ tels que $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ soit une base orthonormée directe. $\mathcal{D}$ est alors l'intersection du plan $\mathcal{P}_1$ passant par A et normal à $\vec{v}$ et du plan $\mathcal{P}_2$ passant par A et passant par $\vec{w}$.

• La réciproque découle directement de la propriété précédente. □

d. *Intersection droite/plan*

Définition 5 :
Une droite $\mathcal{D}$ est **parallèle à un plan** $\mathcal{P}$ si un vecteur directeur de $\mathcal{D}$ est dans la direction $\overrightarrow{P}$ de $\mathcal{P}$.

Remarque 3 : Soit $\mathcal{D}$ droite dirigée par $\vec{u}$ et $\mathcal{P}$ plan dirigé par $\vec{v}$ et $\vec{w}$.
$\mathcal{D}$ est parallèle à $\mathcal{P}$ si et seulement si $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires, donc $\mathcal{D}$ est parallèle à $\mathcal{P}$ si et seulement si $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = 0$.

Proposition 4

• Une droite parallèle à un plan est contenue dans $\mathcal{P}$ ou disjointe de $\mathcal{P}$.
• Une droite non parallèle à un plan $\mathcal{P}$ coupe celui-ci en un unique point.

démo : Montrons le deuxième point.
Considérons $\mathcal{D}$ la droite passant par A, dirigée par $\vec{u}$ et $\mathcal{P}$ le plan passant par B et orthogonal à $\vec{n}$.
Soit M un point de $\mathcal{D}$: il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{AM} = \lambda \vec{u}$.

$$\begin{aligned} M \in \mathcal{P} &\iff \overrightarrow{BM} \cdot \vec{n} = 0, \\ &\iff (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AM}) \cdot \vec{n} = 0, \\ &\iff \overrightarrow{BA} \cdot \vec{n} + \lambda \vec{u} \cdot \vec{n} = 0. \end{aligned}$$

Or $\vec{u}$ n'est pas dans la direction de $\mathcal{P}$ donc $\vec{u} \cdot \vec{n} \neq 0$. Donc $M \in \mathcal{P} \iff \lambda = -\frac{\overrightarrow{BA} \cdot \vec{n}}{\vec{u} \cdot \vec{n}}$.
Il existe donc un unique $\lambda \in \mathbb{R}$ convenant. Il y a donc un unique point d'intersection de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{D}$. □

Définition 6 :
Deux droites sont dites **parallèles** si leurs vecteurs directeurs sont colinéaires.
Deux droites sont dites **orthogonales** si leurs vecteurs directeurs sont orthogonaux.
Deux droites sont dites **perpendiculaires** si elles sont orthogonales et sécantes.
Deux droites sont dites **coplanaires** si elles sont parallèles ou sécantes.

3. Distances

a. *Distance d'un point à un plan*

Soit $\mathscr{P}$ un plan et M un point de l'espace.

Le projeté orthogonal de M sur $\mathscr{P}$ est l'unique point H de $\mathscr{P}$ tel que $\overrightarrow{MH}$ est orthogonal à $\mathscr{P}$.

Définition 7 : La distance de M à $\mathscr{P}$, notée $d(A,\mathscr{P})$, est le réel $d(M,\mathscr{P}) = MH$ où H est le projeté orthogonal de M sur $\mathscr{P}$.

C'est la plus petite distance entre M et un point de $\mathscr{P}$: $d(M,\mathscr{P}) = \min\{MN,\ N \in \mathscr{P}\}$.

Proposition 5

Soit $\mathscr{P}$ un plan et M un point de l'espace.

- $\mathscr{P}$ est défini par un point A et un vecteur normal $\vec{n}$: $d(M,\mathscr{P}) = \dfrac{|\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}|}{\|\vec{n}\|}$.
- $\mathscr{P}$ est défini par un point A et sa direction $\mathrm{Vect}(\vec{u},\vec{v})$: $d(M,\mathscr{P}) = \dfrac{\left|\left[\vec{u},\vec{v},\overrightarrow{AM}\right]\right|}{\|\vec{u}\wedge\vec{v}\|}$.
- $\mathscr{P}$ est défini par une équation cartésienne $ax+by+cz+d=0$: $d(M,\mathscr{P}) = \dfrac{|ax_M+by_M+cz_M+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

où (x_M, y_M, z_M) désignent les coordonnées de M.

démo :

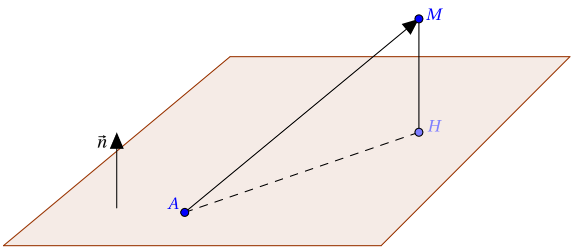
On note H le projeté orthogonal de M sur $\mathscr{P}$.

• On calcule $\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n} = (\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{HM})\cdot\vec{n} = \overrightarrow{HM}\cdot\vec{n}$ car $\overrightarrow{AH}$ et $\vec{n}$ sont orthognaux.

Or $\overrightarrow{HM}$ est colinéaire à $\vec{n}$, donc $|\overrightarrow{HM}\cdot\vec{n}| = HM\|\vec{n}\|$. On en déduit le résultat.

• Pour le deuxième cas, prendre $\vec{n} = \vec{u}\wedge\vec{v}$.

• Pour le dernier cas, prendre $\vec{n}$ de coordonnées (a,b,c) et un point $A(x_0,y_0,z_0)$ vérifiant l'équation de $\mathscr{P}$. On calcule $\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n} = |ax_M+by_M+cz_M+d|$. □



b. *Distance d'un point à une droite*

Soit $\mathscr{D}$ une droite et M un point de l'espace.

On note H le projeté orthogonal de M sur $\mathscr{D}$: c'est l'unique point d'intersection de $\mathscr{D}$ avec le plan passant par M et de vecteur normal un vecteur directeur de $\mathscr{D}$.

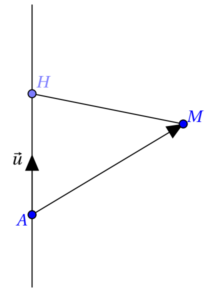
Définition 8 : La distance de M à $\mathscr{D}$, notée $d(A,\mathscr{D})$, est le réel $d(M,\mathscr{D}) = MH$ où H est le projeté orthogonal de M sur $\mathscr{D}$.

C'est la plus petite distance entre M et un point de $\mathscr{D}$: $d(M,\mathscr{D}) = \inf\{MN,\ N \in \mathscr{D}\}$.

Proposition 6

Soit $\mathscr{D}$ une droite passant par A et dirigée par $\vec{u}$. Soit M un point de l'espace.

$$d(M,\mathscr{D}) = \frac{\|\vec{u}\wedge\overrightarrow{AM}\|}{\|\vec{u}\|}.$$



démo : On note H le projeté orthogonal de M sur $\mathscr{D}$.
$\vec{u} \wedge \overrightarrow{AM} = \vec{u} \wedge (\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HM}) = \vec{u} \wedge \overrightarrow{HM}$ car $\vec{u}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont colinéaires.
donc $\|\vec{u} \wedge \overrightarrow{AM}\| = \|\vec{u} \wedge \overrightarrow{HM}\| = \|\vec{u}\| \, \|\overrightarrow{HM}\|$ car $\vec{u}$ et $\overrightarrow{HM}$ sont orthogonaux. $\square$

4. Sphères

Définition 9 : soient Ω un point de l'espace et $R \in]0,+\infty[$.
On appelle **sphère de centre Ω, de rayon** R l'ensemble des points M de l'espace tels que $\Omega M = R$.

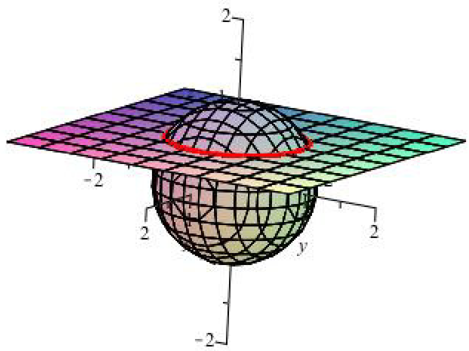
Proposition 7

Soit Ω de coordonnées (x_0, y_0, z_0) et $R > 0$.
La sphère de centre Ω et de rayon R a pour équation cartésienne

$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 = R^2 .$$

Remarque 4 :

- Toute sphère possède une équation cartésienne de la forme $x^2 + y^2 + z^2 - 2\alpha x - 2\beta y - 2\gamma z + \delta = 0$ avec $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ et $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \delta > 0$.
- Réciproquement, tout ensemble ayant une équation cartésienne de ce type est une sphère de centre $\Omega(\alpha, \beta, \gamma)$ et de rayon $R = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \delta}$.
- Soient A et B deux points distincts de l'espace. L'ensemble $\{M \in \mathscr{E} \;/\; \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0\}$ est une sphère de centre Ω, milieu de $[AB]$, passant par A et B.



Définition 10 : Un cercle de l'espace est l'intersection d'une sphère et d'un plan. Son centre est l'intersection de la droite passant par le centre de la sphère et orthogonale au plan.

II. SURFACES

1. Définitions

a. *Nappe paramétrée*

Définition 11 : Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$. soit $\varphi : U \to \mathbb{R}^3$ une application de classe C^1.
On appelle **nappe paramétrée** le couple (U, φ).

Pour $(u,v) \in U$, on note $M(u,v)$ le point de coordonnées $\varphi(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$ dans$(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$.
Et on considère $\varphi(u,v)$ comme le vecteur $\overrightarrow{OM}(u,v)$.

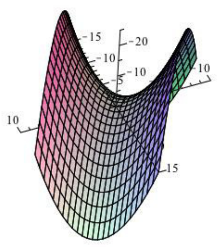
Le **support** $\mathscr{S}$ de la nappe est l'ensemble Γ des points $\{M(u,v),\ (u,v) \in U\}$.

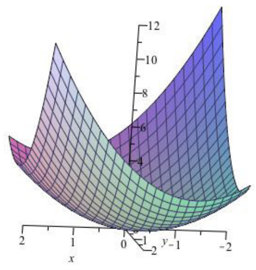
Remarque 5 : Soit $M(x,y,z)\in\mathscr{E}$, $M\in\mathscr{S} \iff \exists(u,v)\in U$, $\left\{\begin{array}{ll} x &= x(u,v) \\ y &= y(u,v) \\ z &= z(u,v)\end{array}\right.$.

Exemple 1

➙ $\varphi: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (u,v) & \mapsto & (u-v, u^2-v^2, 2u+v)\end{array}$

➙ $\varphi: \begin{array}{ccc} U & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \mapsto & (x,y,x^2+y^2+xy)\end{array}$



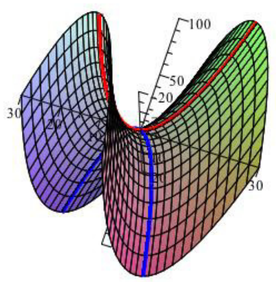


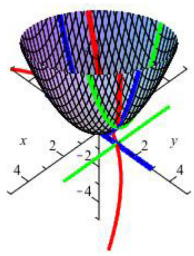
Courbes tracées sur la surface : Soit (U,φ) une nappe paramétrée et $\mathscr{S}$ son support.

➙ Si $t\mapsto(u(t),v(t))$ est à valeurs dans U, alors la fonction $t\mapsto\varphi(u(t),v(t))$ définit une courbe tracée sur la surface $\mathscr{S}$.

➙ Un cas particulier : fixons $(u_0,v_0)\in U$ et considérons les applications $t\mapsto\varphi(t,v_0)$ (définie dans un voisinage de u_0) et $t\mapsto\varphi(u_0,t)$ (définie dans un voisinage de v_0).

À ces applications correspondent des courbes tracées sur la surface $\mathscr{S}$ qui sont les courbes coordonnées.





b. *Surface définie par une équation cartésienne* (ou surface de niveau)

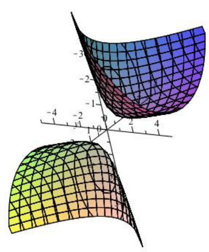
Définition 12 : Soit $F: V\subset\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ une application de classe C^1 sur V, ouvert de $\mathbb{R}^3$.
L'ensemble $\mathscr{S}=\{M(x,y,z)\in\mathscr{E}\ /\ F(x,y,z)=0\}$ est appelé surface définie par l'équation cartésienne $F(x,y,z)=0$.

Exemple 2

➢ L'ensemble d'équation $x^2+y^2+z^2=1$ est la sphère de centre O et de rayon 1.

➢ L'ensemble d'équation $x+y-2z=0$ est un plan.

➢ L'ensemble d'équation $x^2-y^2+z^2-3xy+1=0$ est une quadrique.



Sous certaines conditions, on peut passer d'une représentation par équation cartésienne à une représentation paramétrée de la surface. Le théorème suivant permet de le faire localement.

Théorème des fonctions implicites - (Hors programme)

> Soit $F : V \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ une application de classe C^1 sur V, ouvert de $\mathbb{R}^3$.
> Soit $A(a,b,c)$ un point tel que $F(a,b,c)=0$. On suppose que $\dfrac{\partial F}{\partial z}(a,b,c) \neq 0$.
> Alors il existe un voisinage U de (a,b) dans $\mathbb{R}^2$, un voisinage $]c-\varepsilon, c+\varepsilon[$ de c dans $\mathbb{R}$, et une application $g : U \to]c-\varepsilon, c+\varepsilon[$ de classe C^1 sur U tels que $\forall (x,y,z)\ U\times]c-\varepsilon, c+\varepsilon[, \quad F(x,y,z)=0 \iff z=g(x,y)$.

c. *Le cas particulier* $z=g(x,y)$

Soit $g : \begin{array}{ccc} U & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & g(x,y) \end{array}$ une application de classe C^1 sur U.

➢ L'application $\varphi : \begin{array}{ccc} U & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \mapsto & (x,y,g(x,y)) \end{array}$ définit une nappe paramétrée Γ de classe C^1.

Les équations paramétrées de cette surface sont : $\left\{\begin{array}{ll} x & = x \\ y & = y \\ z & = g(x,y) \end{array}\right. \quad , \quad (x,y) \in U$

➢ En posant $F : (x,y,z) \mapsto z-g(x,y)$, on obtient une équation cartésienne de la surface Γ : $F(x,y,z)=0$.

> La surface d'équation cartésienne $z-g(x,y)=0$ est la surface paramétrée par $\varphi : (x,y) \mapsto (x,y,g(x,y))$.

2. Plan tangent

a. *Cas des nappes paramétrées*

On considère (U,φ) une nappe paramétrée de classe C^1. On désigne par $\mathscr{S}$ son support.
On note $\varphi : (u,v) \mapsto (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$. Les dérivées partielles de φ en (u,v) sont deux vecteurs $\dfrac{\partial \varphi}{\partial u}(u,v) = \left(\dfrac{\partial x}{\partial u}(u,v), \dfrac{\partial y}{\partial u}(u,v), \dfrac{\partial z}{\partial u}(u,v)\right)$ et $\dfrac{\partial \varphi}{\partial v}(u,v) = \left(\dfrac{\partial x}{\partial v}(u,v), \dfrac{\partial y}{\partial v}(u,v), \dfrac{\partial z}{\partial v}(u,v)\right)$.

> **Définition** 13 :
> Soit $(u,v) \in U$.
> ➢ On dit que $M(u,v)$ est un **point régulier** de $\mathscr{S}$ si et seulement si la famille $\left(\dfrac{\partial \varphi}{\partial u}(u,v), \dfrac{\partial \varphi}{\partial v}(u,v)\right)$ est libre.
> ➢ On dit que (U,φ) est une **nappe régulière** si tout ses points sont réguliers.
> ➢ Soit M un point régulier de $\mathscr{S}$.
> ➞ On appelle **plan tangent** en M à $\mathscr{S}$ le plan passant par M, dirigé par $\left(\dfrac{\partial \varphi}{\partial u}(u,v), \dfrac{\partial \varphi}{\partial v}(u,v)\right)$.
> ➞ On appelle **droite normale** à $\mathscr{S}$ en M la normale au plan tangent passant par M, elle est dirigée par le vecteur $\dfrac{\partial \varphi}{\partial u}(u,v) \wedge \dfrac{\partial \varphi}{\partial v}(u,v)$.

Exercice 1: On considère la surface $\mathscr{S}$ paramétrée par $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (u,v) & \to & (u-v, u^2-v^2, 2u+v) \end{array}$.
Quels sont les points réguliers de $\mathscr{S}$?
Déterminer une équation cartésienne du plan tangent à $\mathscr{S}$ en $M_0(1,0)$.

b. *Cas des surfaces définies par une équation cartésienne*

Soit $F : V \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ une application de classe C^1 sur V, ouvert de $\mathbb{R}^3$.
On considère la surface $\mathscr{S} = \{M(x,y,z) \in \mathscr{E}\ /\ F(x,y,z)=0\}$.

Définition 14 :

Le point $A(a,b,c)$ de la surface est dit **régulier** si le vecteur $\overrightarrow{\text{grad}}\,F(a,b,c)\begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x}(a,b,c) \\ \frac{\partial F}{\partial y}(a,b,c) \\ \frac{\partial F}{\partial z}(a,b,c)\end{pmatrix}$ est non nul.

Proposition 8

Soit $\mathcal{S}$ d'équation cartésienne $F(x,y,z)=0$ avec F de classe C^1 sur $V\subset\mathbb{R}^3$.
Soit $A(a,b,c)$ un point régulier de $\mathcal{S}$, le vecteur $\overrightarrow{\text{grad}}\,F(a,b,c)$ est un vecteur normal à $\mathcal{S}$ en A.
Le plan tangent à $\mathcal{S}$ en M admet donc pour équation cartésienne :

$$\frac{\partial F}{\partial x}(a,b,c)\ (x-a)+\frac{\partial F}{\partial y}(a,b,c)\ (y-b)+\frac{\partial F}{\partial z}(a,b,c)\ (z-c)=0\,.$$

Exercice 2

- Déterminer le plan tangent à la sphère S d'équation $x^2+y^2+z^2=1$ en un point $M_0(x_0,y_0,z_0)$ de S.
- Déterminer le plan tangent à la surface H d'équation $3x^3+y^2-2z^2+x-3y+z=1$ au point $M_0(x_0,y_0,z_0)$ de H.

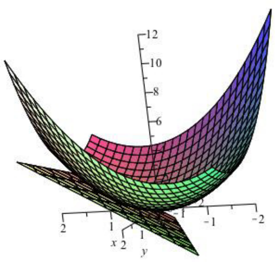
c. *Le cas particulier $z=g(x,y)$*

Soit $g\ :\ U\to\mathbb{R}$ une application de classe C^1 sur U. On note $f\ :\ \begin{array}{ccc} U & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \to & (x,y,g(x,y))\end{array}$.
Soit $(a,b)\in U$ et M le point de coordonnées (a,b,c) (avec $c=g(a,b)$) de la surface associée.
On a $\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}(a,b)=\begin{pmatrix}1\\0\\ \frac{\partial g}{\partial x}(a,b)\end{pmatrix}$ et $\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}(a,b)=\begin{pmatrix}0\\1\\ \frac{\partial g}{\partial y}(a,b)\end{pmatrix}$. Le point M est donc régulier.
Le plan tangent en M a pour équation $z-c=\dfrac{\partial g}{\partial x}(a,b)(x-a)+\dfrac{\partial g}{\partial y}(a,b)(y-b)$.

Positions relatives

Pour déterminer la position relative de la surface et du plan tangent, on doit **étudier le signe** de $g(x,y)-(c+\frac{\partial g}{\partial x}(a,b)(x-a)+\frac{\partial g}{\partial y}(a,b)(y-b))$.

Pour g de classe C^2, on applique la formule de Taylor-Young à l'ordre 2 au voisinage de (a,b) :



$$\begin{aligned}\forall(x,y)\in U,\ g(x,y)=&\ g(a,b)+\frac{\partial g}{\partial x}(a,b)(x-a)+\frac{\partial g}{\partial y}(a,b)(y-b)\\ &+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(a,b)(x-a)^2+2\frac{\partial^2 g}{\partial x\partial y}(a,b)(x-a)(y-b)+\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(a,b)(y-b)^2\right)\\ &+o(\|(x-a,y-b)\|^2).\end{aligned}$$

On introduit la matrice hessienne de g en (a,b), elle est symétrique réelle donc diagonalisable (*C'est le théorème spectral*). On note λ et μ ses valeurs propres et au moyen d'un changement de repère, on trouve que l'expression à calculer est $\lambda x'^2+\mu y'^2$. Son signe peut donc être étudié plus facilement.

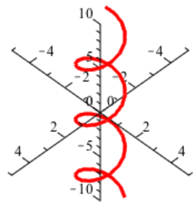
III. COURBES

1. Définitions

a. *Courbe paramétrée*

Définition 15 : Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, et $f : I \to \mathbb{R}^3$ une application de classe C^k avec $k \in \mathbb{N}^*$.
On appelle **arc paramétré** de classe C^k le couple (I, f).

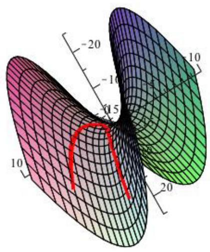
Notons $f : t \mapsto (x(t), y(t), z(t))$. On identifie $f(t)$ à un vecteur $\overrightarrow{OM}(t)$ où $M(t)$ est le point de point de coordonnées $(x(t), y(t), z(t))$.
L'ensemble $\Gamma = \{M(t),\ t \in I\}$ est appelé support ou **trajectoire** de l'arc. C'est une courbe de l'espace $\mathscr{E}$.



Exemple 3 : La courbe $\mathscr{H}$ est définie par le paramétrage
$$\begin{cases} x(t) &= \cos t \\ y(t) &= \sin t \quad , t \in \mathbb{R}. \\ z(t) &= t \end{cases}$$

➢ **Courbe tracée sur une surface**

On considère une surface $\mathscr{S}$ paramétrée par $\varphi : (u, v) \mapsto (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$, de classe C^1 sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$. Soit $t \mapsto (u(t), v(t))$ une application de classe C^1 sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans U.
La fonction $t \mapsto \varphi(u(t), v(t))$ définit une courbe paramétrée de classe C^1, **tracée sur la surface** $\mathscr{S}$.



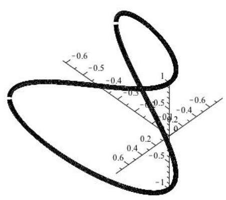
Exemple 4 : On considère la surface paramétrée par
$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (u, v) & \to & (u - v, u^2 - v^2, 2u + v) \end{array}$$
et la courbe paramétrée par $t \mapsto \varphi(t^2, t - 1)$. Cette courbe est tracée sur la surface.

b. *Définition d'une courbe par un système d'équations cartésiennes*

Soient f et g deux applications de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$. Sous certaines conditions sur f et g, l'ensemble des points $M(x, y, z)$ vérifiant le système d'équations cartésiennes $\begin{cases} f(x, y, z) = 0 \\ g(x, y, z) = 0 \end{cases}$ est une courbe de l'espace.
Cette courbe est définie comme l'intersection de deux surfaces.

Exemple 5 :

La courbe d'équations $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ x^2 + y = 0 \end{cases}$ est représentée ci-contre, c'est l'intersection de deux surfaces de l'espace.

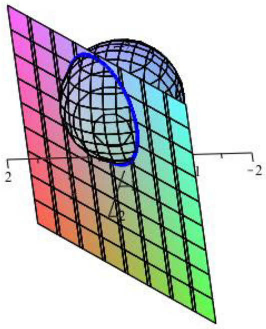


➢ **Intersections planes**

Un exemple courant de courbes définies comme intersection est celui des intersection de surfaces avec un plan. On parle alors d'intersection plane.

Exemple 6 :

- La courbe d'équations $\begin{cases} x^2+y^2+(z-1)^2=1 \\ x+y=\frac{1}{2} \end{cases}$ est un cercle.



Un cercle est l'intersection d'une sphère et d'un plan. Il peut aussi être défini par la donnée d'un centre, d'un rayon et d'un axe passant par le centre : dans ce cas, le cercle est inclus dans le plan orthogonal à l'axe donné et passant par le centre.

- La courbe d'équations $\begin{cases} \frac{x^2}{2}+y^2=1 \\ z=1 \end{cases}$ est une ellipse.

2. Tangente

➢ **Pour une courbe définie par un paramétrage**

Définition 16 : Soit (I,f) un arc paramétré de $\mathscr{E}$, de classe C^k avec $k\geqslant 1$. Soit $t\in I$ et $M(t)$ un point de l'arc.
On dit que $M(t)$ est **régulier** si $f'(t)\neq\overrightarrow{0}$ (et singulier sinon).
On dit que l'arc est régulier si tous ses points sont réguliers.

Proposition 9

Soit $t\in I$ et $M(t)$ un point régulier d'une courbe paramétrée par f, de classe C^1. La courbe admet en $M(t)$ une tangente : c'est la droite passant par $M(t)$ et dirigée par $f'(t)$.

➢ Pour une courbe tracée sur une surface

On considère (U,φ) une surface paramétrée de $\mathbb{R}^3$: $\varphi : \begin{array}{ccc} U & \to & \mathbb{R}^3 \\ (u,v) & \mapsto & (x(u,v),y(u,v),z(u,v)) \end{array}$.
On note $\mathscr{S}$ le support de la surface.

Considérons $\psi : \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R}^2 \\ t & \mapsto & (u(t),v(t)) \end{array}$, où I est un intervalle de $\mathbb{R}$, ψ est de classe C^1 et $\forall t\in I,\ \psi(t)\in U$.
On pose enfin $f=\varphi\circ\psi$, i.e. $f\ :\ t\mapsto\varphi(u(t),v(t))$. Le couple (I,f) définit une courbe paramétrée $\mathscr{C}$ dans $\mathbb{R}^3$ qui est tracée sur la surface $\mathscr{S}$.
Cherchons à déterminer la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ en un point $M(t_0)$ de cette courbe, pour $t_0\in I$.
On suppose que le point $M(t_0)$ est un point régulier de la surface $\mathscr{S}$.
On calcule $f'(t_0)=u'(t_0)\dfrac{\partial\varphi}{\partial u}(u(t_0),v(t_0))+v'(t_0)\dfrac{\partial\varphi}{\partial v}(u(t_0),v(t_0))$.
Cela signifie que $f'(t_0)\in\mathrm{Vect}(\dfrac{\partial\varphi}{\partial u}(u(t_0),v(t_0)),\dfrac{\partial\varphi}{\partial v}(u(t_0),v(t_0)))$.

Donc la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ en $M(t_0)$ (lorsqu'elle est définie) est dans le plan tangent à $\mathscr{S}$ en $M(t_0)$.

Réciproquement, toute droite Δ passant par $M(t_0)$ dans le plan tangent à $\mathcal{S}$, est la tangente à une courbe tracée sur la surface $\mathcal{S}$. Pour le montrer, il faut choisir $\psi = (u, v)$ telle que $\varphi(u(t_0), v(t_0)) = M(t_0)$ et $(u'(t_0), v'(t_0))$ sont les coordonnées d'un vecteur directeur de la droite Δ dans la base $(\frac{\partial\varphi}{\partial u}(u(t_0), v(t_0)), \frac{\partial\varphi}{\partial v}(u(t_0), v(t_0)))$ du plan tangent.

➢ **Pour une courbe définie comme l'intersection de deux surfaces**

Soient $\mathcal{S}_1$ et $\mathcal{S}_2$ deux surfaces qui s'intersectent le long d'une courbe $\mathcal{C}$.
Soit $M \in \mathcal{C}$. On suppose qu'en M les plans tangents à $\mathcal{S}_1$ et $\mathcal{S}_2$ sont bien définis et non parallèles (donc distincts).
Alors la tangente à $\mathcal{C}$ en M est bien définie et c'est la droite d'intersection des plans tangents aux deux surfaces.

Proposition 10

Soit $\mathcal{C}$ la courbe définie par $\begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases}$. On pose $\vec{u} = \overrightarrow{\text{grad}}\, F(x_0, y_0, z_0) \wedge \overrightarrow{\text{grad}}\, G(x_0, y_0, z_0)$.
Si $\vec{u}$ est non nul, alors la tangente en $M(x_0, y_0, z_0)$ à $\mathcal{C}$ est la droite passant par M et dirigée par $\vec{u}$.

Exemple 7 :

La tangente en $M(x_0, y_0, z_0)$ à $\mathcal{C}$: $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ x^2 + y = 0 \end{cases}$ est dirigée par $\vec{u}(-z_0, 2x_0z_0, x_0(2y_0 - 1))$.

➢ Pour une courbe définie comme une intersection plane

Si $\mathcal{C}$ est l'intersection d'une surface et d'un plan $\mathcal{P}$, alors les tangentes à la courbes sont dans le plan $\mathcal{P}$.

IV. EXEMPLES DE SURFACES

1. Surfaces réglées

Définition 17 : Une $\mathcal{S}$ surface de l'espace est dite **réglée** si elle est réunion d'une famille de droites. Les droites engendrant $\mathcal{S}$ sont appelées **génératrices** de $\mathcal{S}$.

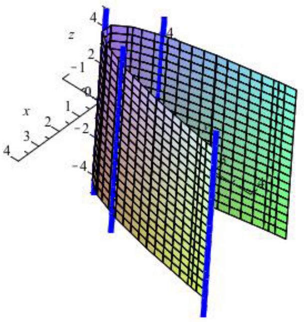
Exemple 8

➢ Pour $a \in \mathbb{R}$, on définit la droite D_t : $\begin{cases} x = t \\ y = t^2 \\ z = \lambda \end{cases}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

La surface $\mathcal{S} = \bigcup_{t \in \mathbb{R}} D_t$ est une surface réglée.

Elle a pour équations paramétrées : $\begin{cases} x = t \\ y = t^2 \\ z = \lambda \end{cases}$, $(t, \lambda) \in \mathbb{R}^2$.

Elle a pour équation cartésienne $x^2 = y$. *C'est un cylindre.*



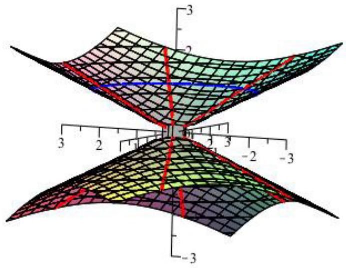
Définition par paramétrage

Une surface $\mathcal{S}$ est réglée si et seulement si elle admet un paramétrage du type : $\begin{array}{ccc} I \times \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^3 \\ (t, \lambda) & \mapsto & A(t) + \lambda \vec{u}(t) \end{array}$,
où pour tout $t \in I$, $A(t)$ est un point de l'espace et $\vec{u}(t)$ un vecteur non nul.

La définition donne un paramétrage. Pour trouver une équation cartésienne, il faut éliminer t et λ pour obtenir une équation liant $x,\ y,\ z$.

Exemple 9

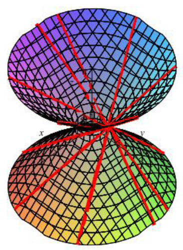
➢ On considère un cercle Γ paramétré par $\begin{cases} x(t) = 2\cos t \\ y(t) = 2\sin t \\ z = 1 \end{cases},\ t \in \mathbb{R}$.

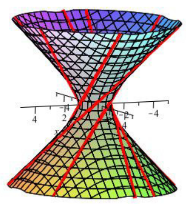


Les droites $\big((OM(t))\big)_{t\in\mathbb{R}}$ fournissent une famille engendrant un *cône* $\mathscr{C}$. Il a pour parmaétrage $\begin{cases} x = 2\lambda\cos t \\ y = 2\lambda\sin t \\ z = \lambda \end{cases},\ (t,\lambda) \in \mathbb{R}^2$. Il admet pour équation cartésienne $\dfrac{x^2}{2} + y^2 - 2z^2 = 0$.

➢ Soit $\mathscr{H}$ la surface d'équation $x^2 + y^2 - z^2 = 1$. *Un hyperboloïde à une nappe*

$\mathscr{H} = \bigcup\limits_{t\in[0,2\pi]} D_t$ avec D_t : $\begin{cases} x &= \cos t - \lambda\sin t \\ y &= \sin t + \lambda\cos t \\ z &= \lambda \end{cases},\ \lambda \in \mathbb{R}$.





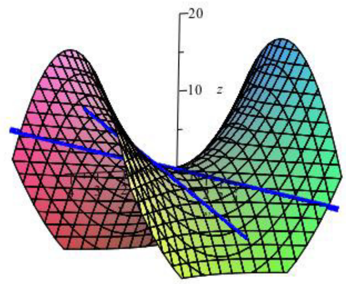
Exemple 10 :

On se donne une famille de droites $\mathscr{D}_t$ définies par $A(t)(\frac{1}{4t}, \frac{1}{4t}, 0)$ et $\vec{u}(t)(t,-t,1)$. On considère la surface $\mathscr{S} = \bigcup\limits_{t\in\mathbb{R}} D_t$.

Pour déterminer une équation cartésienne de $\mathscr{S}$, on écrit des équations paramétriques de D_t, puis on élimine t et λ.

$M(x,y,z) \in \mathscr{S} \iff \exists t \in \mathbb{R},\ M \in D_t$,

donc $M(x,y,z) \in \mathscr{S} \iff \exists t \in \mathbb{R},\ \exists\lambda \in \mathbb{R},\ \begin{cases} x = \dfrac{1}{4t} + \lambda t \\ y = \dfrac{1}{4t} - \lambda t \\ z = \lambda \end{cases}$.



On obtient, en éliminant λ et t une condition sur $x,\ y,\ z$ pour que le point M soit sur $\mathscr{S}$: $\boxed{x^2 - y^2 = z}$. *C'est ici un paraboloïde hyperbolique.*

➢ Plan tangent et génératrice

Proposition 11

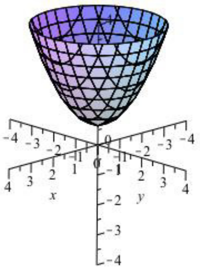
Soit $\mathscr{S}$ une surface réglée et M un point régulier de $\mathscr{S}$.
Le plan tangent à $\mathscr{S}$ en M contient la génératrice passant par M.

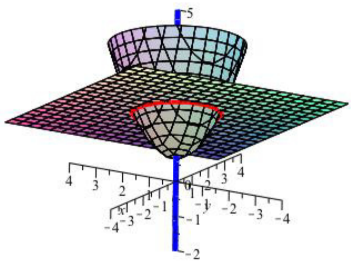
démo : Soit $\mathscr{S}$ une surface réglée définie par le paramétrage de classe C^1, f : $\begin{array}{ccc} I\times\mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^3 \\ (t,\lambda) & \mapsto & A(t) + \lambda\vec{u}(t) \end{array}$.

Soit $M(t,\lambda)$ un point de $\mathscr{S}$ que l'on suppose régulier. Le plan tangent en M à $\mathscr{S}$ est dirigé par $\dfrac{\partial f}{\partial t}(t,\lambda) = \dfrac{d\overrightarrow{OA}}{dt}(t) + \lambda\vec{u}\,'(t)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial\lambda}(t,\lambda) = \vec{u}(t)$. Ce plan tangent contient donc la génératrice D_t, passant par $M(t,\lambda)$ et dirigée par $\vec{u}$.

2. Surfaces de révolution

Définition 18 : Soit $\mathscr{D}$ une droite de l'espace affine. On appelle **ensemble de révolution** d'axe $\mathscr{D}$ toute ensemble $\mathscr{S}$ de points de l'espace qui est invariant par toute rotation d'axe $\mathscr{D}$.





Exemple 11 :

➢ Une sphère centrée en O est de révolution d'axe toute droite passant par O.

➢ Tout ensemble $\mathscr{S}$ qui admet une équation cartésienne du type $H(x^2+y^2,z)=0$ est une surface de révolution d'axe (Oz). Exemple : $2(x^2+y^2)-3z+2=0$.

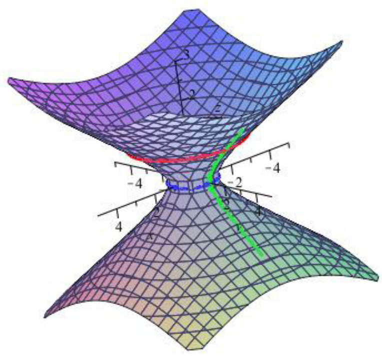
Caractérisation : Soit $\mathscr{S}$ une surface. Si l'intersection de $\mathscr{S}$ avec tout plan orthogonal à $\mathscr{D}$ est soit vide, soit un cercle centré en un point de $\mathscr{D}$, alors $\mathscr{S}$ est une surface de révolution d'axe $\mathscr{D}$.

<u>Vocabulaire</u> : $\mathscr{D}$ est appelé axe de révolution (il n'est pas forcément unique).
Une **méridienne** est l'intersection de $\mathscr{S}$ avec un plan contenant l'axe $\mathscr{D}$.
Un **parallèle** est l'intersection de $\mathscr{S}$ avec un plan orthogonal à $\mathscr{D}$.

<u>Définition par axe et méridienne</u> :

Soit Γ une courbe, paramétrée par $\begin{cases} x &= x(t) \\ y &= y(t) \quad , \ t\in I. \\ z &= z(t) \end{cases}$

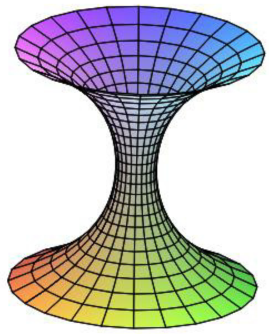
La surface de révolution engendrée par la rotation de Γ autour de l'axe (Oz) admet pour paramétrage $\begin{cases} x &= x(t)\cos\theta - y(t)\sin\theta \\ y &= x(t)\sin\theta + y(t)\cos\theta \quad ,(t,\theta)\in I\times[0,2\pi]. \\ z &= z(t) \end{cases}$



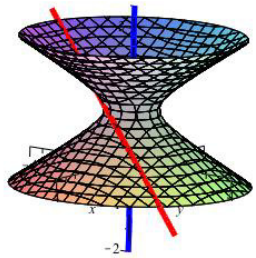
Exemple 12 :

➢ On prend Γ : $\begin{cases} x &= a\text{ch}(\dfrac{t}{a}) \\ y &= 0 \quad\quad , \ t\in\mathbb{R}. \\ z &= t \end{cases}$

La surface de révolution par rotation de Γ autour de (Oz) est une catenoïde $\begin{cases} x &= a\text{ch}(\dfrac{t}{a})\cos\theta \\ y &= a\text{ch}(\dfrac{t}{a})\sin\theta \quad ,(t,\theta)\in\mathbb{R}\times[0,2\pi]. \\ z &= t \end{cases}$



➢ Rotation d'une droite autour de l'axe (Oz)



Prenons la droite passant par $A(1,0,1)$ et dirigée par $\vec{u}(1,2,-1)$.
La surface de révolution obtenue pa rotation de $\mathscr{D}$ autour de (Oz) a pour paramétrage :

$$\begin{cases} x &= (1+t)\cos\theta - 2t\sin\theta \\ y &= (1+t)\sin\theta + 2t\cos\theta \quad ,(t,\theta)\in\mathbb{R}\times[0,2\pi]. \\ z &= 1-t \end{cases}$$

En éliminant t et θ, on trouve une équation cartésienne (*on calucle ici x^2+y^2 pour éliminer θ*) : $x^2+y^2=(2-z)^2+4(1-z)^2$ et enfin $\boxed{x^2+y^2-5(z-\frac{6}{5})^2=\frac{4}{5}}$. C'est un *hyperboloïde à une nappe*.