I. Calcul des puissances d'une matrice carrée

1. Si A est diagonalisable

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$, on veut calculer A^k pour $k \in \mathbb{N}$. On suppose ici que A est diagonalisable. Voici alors une démarche classique :

➙ Diagonaliser A : trouver D diagonale et $P \in GL_n(\mathbb{K})$ telles que $D = P^{-1}AP$.

➙ On calcule alors facilement D^k pour $k \in \mathbb{N}$.

➙ On montre que $A = PDP^{-1}$ puis par récurrence (sur k) : $\forall k \in \mathbb{N},\ A^k = PD^kP^{-1}$.

Exercice 1 : Calculer les puissances de $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

Remarque 1 : Cette méthode s'adapte bien au cas où A est trigonalisable, en utilisant ce qui suit pour calculer les puissances de la matrice triangulaire semblable à A.

2. Utilisation du binôme de Newton avec $A = I_n + B$

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$, on veut calculer A^k pour $k \in \mathbb{N}$.

On pose $B = A - I_n$, pour que cette méthode ait un intérêt il faut que les puissances de B se calculent facilement. C'est le cas par exemple,

➢ si B est nilpotente : il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $B^p = 0$,

➢ si $B^2 = I_n$ ou si $B^2 = B$ ou si $B^2 = -B$.

On a donc $A = I_n + B$ et B et I_n commutent, donc on peut utiliser la formule du binôme de Newton :

pour $k \in \mathbb{N}$, $A^k = (I_n + B)^k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} B^j$.

Exercice 2: Calculer les puissances de la matrice $A = \begin{pmatrix} -3 & -10 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$.

3. Utilisation d'un polynôme annulateur

On suppose qu'il existe $T \in \mathbb{R}[X]$ tel que $T(A) = 0$.

➢ On effectue la division euclidienne de X^k par T : $X^k = T \times Q + R$ avec $\deg R < \deg T$.

On détermine le polynôme R (à l'aide des racines de T en général).

➢ On "transpose" l'égalité de polynôme dans les matrices (il y a un morphisme d'algèbre derrière ceci) : $A^k = T(A) \times Q(A) + R(A)$ et puisque $T(A) = 0$ on a donc $A^k = R(A)$ (*les coefficients de R dépendent de k ici.*)

Exercice 3

Essayons avec A une matrice de $M_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 + 2A - 3I_n = 0$.

➙ On pose $P(X) = X^2 + 2X - 3$. On fixe $k \in \mathbb{N}$.

On sait qu'il existe Q et R deux polynômes de $\mathbb{R}[X]$ tels que $X^k = P(X)Q(X) + R(X)$ avec $\deg R < \deg P$.

Ici, on a donc R de degré au plus 1 : R s'écrit $R(X) = \alpha X + \beta$.

Le polynôme P a deux racines réelles : 1 et -3.

On "spécialise" l'égalité de polynômes : $X^k = P(X)Q(X) + R(X)$ en 1 puis en -3 pour obtenir $1 = R(1)$ et $(-3)^k = R(-3)$.

Cela donne un système qui permet de trouver (α, β) : $\alpha = \frac{1}{4}(1 - (-3)^k)$ et $\beta = \frac{1}{4}(3 + (-3)^k)$.

On en déduit $\boxed{R(X) = \frac{1}{4}(1 - (-3)^k)X + \frac{1}{4}(3 + (-3)^k)}$.

➙ On sait que $P(A) = 0$ et $A^k = P(A)Q(A) + R(A)$ donc $A^k = R(A)$.

On en déduit $\boxed{A^k = \frac{1}{4}(1 - (-3)^k)A + \frac{1}{4}(3 + (-3)^k)\ I_n}$.

II. Suites vérifiant une relation de récurrence linéaire

Définition 1 : Soit $a_0, \dots, a_{p-1}$ dans $\mathbb{K}$.
On dit que la suite $(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ vérifie une relation de récurrence linéaire d'ordre p à coefficients constants si
$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+p} = \sum_{k=0}^{p-1} a_k u_{n+k} \qquad (\mathscr{R})$.

Exercice 4

1. Déterminer les suites réelles (u_n) telles que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$.
   Première méthode : c'est une suite définie par une relation de récurrence linéaire d'ordre 2. On pose l'équation caractéristique $(E_c)\ :\ r^2 = 3r - 2$. *etc...*
   Deuxième méthode : transformer la relation de récurrence d'ordre 2 en une relation vectorielle de récurrence d'ordre 1. Pour cela on pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix}$ *et* $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$.
   On a ainsi, $\forall n \in \mathbb{N},\ X_{n+1} = AX_n$ *et donc par récurrence,* $\forall n \in \mathbb{N},\ X_n = A^n X_0$. *Il ne reste plus qu'à calculer* A^n.

2. Déterminer (u_n) définie par $u_0 = 0$, $u_1 = -1$ et $u_2 = 1$, et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+3} = 2u_{n+2} + u_{n+1} - 2u_n$.
   On transformera la relation en une relation vectorielle de récurrence d'ordre 1.

Proposition 1

Soit $a_0, \dots, a_{p-1}$ dans $\mathbb{K}$.
L'ensemble des suites (u_n) vérifiant une telle relation $(\mathscr{R})$ de récurrence linéaire à coefficients constants (fixés) est un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension p.
Une telle suite est uniquement déterminée par la donnée de ses p premiers termes.

Conséquence : pour trouver l'ensemble $\mathscr{E}$ des suites vérifiant la relation de récurrence $(\mathscr{R})$, il suffit de trouver une base de $\mathscr{E}$, donc p suites qui forment une famille libre de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.

Méthode générale :
➢ On transforme la recherche d'une suite numérique (u_n) vérifiant une relation de récurrence d'ordre p en la recherche d'une suite vectorielle (X_n) avec $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \\ \vdots \\ u_{n+p-1} \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K})$, qui vérifie une relation de récurrence d'ordre 1.
On écrit alors $\forall n \in \mathbb{N},\ X_{n+1} = AX_n$.
➢ On sait alors que $\forall n \in \mathbb{N},\ X_n = A^n X_0$. Il ne reste plus qu'à calculer les puissances de A.

III. Systèmes différentiels linéaires d'ordre 1

1. Définitions
   On considère $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On notera $X : \begin{array}{ccc} I & \to & \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \\ t & \mapsto & \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \dots \\ x_n(t) \end{pmatrix} \end{array}$ et $B : \begin{array}{ccc} I & \to & \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \\ t & \mapsto & \begin{pmatrix} b_1(t) \\ \dots \\ b_n(t) \end{pmatrix} \end{array}$.
   X et B désignent donc des fonctions à valeurs vectorielles.
   L'inconnue est X et B est une donnée.

- Un **système différentiel linéaire d'ordre 1** à coefficients constants est de la forme

$$X' = AX + B(t) \quad (S)$$

où l'inconnue X est une fonction de I dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, $A \in M_n(\mathbb{K})$, et $B : I \to \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ est continue (et $n \in \mathbb{N}^*$).

- Une **solution de** (S) est la donnée d'un intervalle J et d'une fonction $X : J \to \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, dérivable sur J et telle que

$$\forall t \in J,\ X'(t) = AX(t) + B(t)\ .$$

- **Le système homogène** associée à (S) est $X' = AX$.

2. Problème de Cauchy

Soit (S) le système différentiel $X' = AX + B(t)$ où $A \in M_n(\mathbb{K})$, $B : I \to \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ est continue sur I.
Soit $(t_0, (y_1, \ldots, y_n)) \in I \times \mathbb{K}^n$.
Résoudre le problème de Cauchy relatif à (S) **et aux données initiales** $(t_0, (y_1, \ldots, y_n))$ consiste à chercher les solutions X de (S) vérifiant $X(t_0) = \begin{pmatrix} y_1 \\ \ldots \\ y_n \end{pmatrix}$.

Proposition 2 *Théorème de Cauchy*

> Soit (S) le système différentiel $X' = AX + B(t)$ où $A \in M_n(\mathbb{K})$, $B : I \to \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ est continue I.
> Soit $(t_0, (y_1, \ldots, y_n)) \in I \times \mathbb{K}^n$.
> Le problème de Cauchy de (S) relatif aux données initiales $(t_0, (y_1, \ldots, y_n))$ admet une unique solution φ définie sur I.

3. Structure de l'ensemble des solutions

On considère le système (S) $X' = AX + B(t)$ et (H) $X' = AX$ où $A \in M_n(\mathbb{K})$, $B : I \to \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ est continue I.

Proposition 3

> - L'ensemble $\mathscr{S}_0$ des solutions du système homogène (H) est un $\mathbb{K}-$ev de dimension n.
> - Si il existe f_0 solution de (E) alors l'ensemble des solutions de (S) est $\{f_0 + f,\ f \in \mathscr{S}_0\}$.

dem : On fixe $t_0 \in I$, grâce au théorème de Cauchy, on montre que l'application $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathscr{S}_0 & \mapsto & \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \\ X & \to & X(t_0) \end{array}$ est un isomorphisme de $\mathbb{K}-$espace vectoriel. Le théorème de Cauchy permet aussi d'affirmer qu'il existe une solution f_0 de (S).

Le principe de superposition est toujours valable.

4. Méthodes de résolution

a. $\boxed{\text{Cas où } A \text{ est diagonalisable dans } \mathbb{K}}$

On cherche donc $X : t \mapsto \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$ solution de $X' = AX + B(t)$ (S).

➢ On diagonalise A : on trouve $D \in M_n(\mathbb{K})$ diagonale et $P \in GL_n(\mathbb{K})$ telles que $D = P^{-1}AP$.
⋆ On pose $Y = P^{-1}X$ et $B_1(t) = P^{-1}B$ (mais on ne calcule pas Y en fonction de X). On montre que X est solution de (S) si et seulement si Y est solution du système $\boxed{Y' = DY + B_1(t)}$.

$\star$ Notons $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$, $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ et $B_1(t) = \begin{pmatrix} \beta_1(t) \\ \beta_2(t) \\ \vdots \\ \beta_n(t) \end{pmatrix}$.

Le système à résoudre est alors $\left\{ \begin{array}{lllll} y_1' & = & \lambda_1 y_1 & + & \beta_1(t) \\ y_2' & = & \lambda_2 y_2 & + & \beta_2(t) \\ \vdots & & \vdots & & \\ y_n' & = & \lambda_n y_n & + & \beta_n(t) \end{array} \right.$.

On résout chacune des équations différentielles linéaires d'ordre 1.

➢ On revient à l'inconnue X par la relation $X = PY$.

On a trouvé une expression de chacune des composantes de Y, ce qui permet de déduire une expression de chacune des composantes de X.

On remarquera que si l'équation est homogène, il est inutile de calculer P^{-1}. Par le résultat sur la structure de l'ensemble des solutions, on peut aussi éviter ce calcul si l'on trouve directement une solution de l'équation complète.

Exemple 1 : Résoudre $\left\{ \begin{array}{ll} x' & = 2x + z \\ y' & = 2y - z \\ z' & = x - y + z \end{array} \right.$

Exemple 2 : Résoudre $\left\{ \begin{array}{ll} x' & = 3x + 3y - 2z + e^t \\ y' & = x + y + 2z \\ z' & = x + 3y + e^t \end{array} \right.$

b. $\boxed{\text{Cas où } A \text{ est triangulaire}}$

➢ A est supposée triangulaire, on note $\lambda_1,\ \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ les coefficients diagonaux de A.

Le système à résoudre est alors $\left\{ \begin{array}{lllllll} x_1' & = & \lambda_1 x_1 & + & \ldots & + & \ldots & +b_1(t) \\ x_2' & = & & & \lambda_2 x_2 & + & \ldots & +b_2(t) \\ \vdots & & & & \vdots & & & \\ x_n' & = & & & & & \lambda_n x_n & +b_n(t) \end{array} \right.$.

➢ On résout d'abord la dernière équation puis on utilise la forme de x_n obtenue pour résoudre l'avant-dernière, etc. On remonte ainsi le système qui ne comporte que des équations différentielles linéaires d'ordre 1.

Exemple 3 : Résoudre $\left\{ \begin{array}{ll} x_1' & = 2x_1 + 3x_2 \\ x_2' & = 2x_2 \end{array} \right.$

Exemple 4 : Résoudre $\left\{ \begin{array}{ll} x' & = 2x - y + te^{3t} \\ y' & = 4y + 1 \end{array} \right.$

5. Équation différentielle linéaire d'ordre p à coefficients constants

Considérons une équation différentielle linéaire d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$ à coefficients constants :

$$y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + a_{n-2} y^{(n-2)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = b(t)\ .$$

où $a_0,\ a_1,\ \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{K}$ et $b\ :\ I \to \mathbb{K}$ est continue.

L'inconnue est $y\ :\ I \to \mathbb{K}$ une fonction $n-$fois dérivable sur I.

On peut se ramener à un système différentiel linéaire d'ordre 1 : $X' = AX + B(t)$

en posant $X = \begin{pmatrix} y \\ y' \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \end{pmatrix}$, puis $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \ldots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{pmatrix}$ et $B(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b(t) \end{pmatrix}$.

Exemple 5 : Résoudre $y^{(3)} = 2y'' + y' - 2y + t$.