I. INTEGRALE D'UNE FONCTION CONTINUE SUR UN INTERVALLE

1. Sur un intervalle de la forme $[a,b[$

Soit $f : [a,b[\to \mathbb{R}$ avec $a<b$ ou $b=+\infty$.
On suppose f continue sur $[a,b[$: f est donc continue sur $[a,x]$ pour tout $x\in[a,b[$. On peut définir l'application $F : x\mapsto \int_a^x f(t)dt$. Grâce au théorème fondamental de l'analyse, on sait que F est de classe C^1 sur $[a,b[$.

Définition 1 : ✰
Soit f continue sur $[a,b[$. On dit que l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ est convergente si la fonction $x\mapsto \int_a^x f(t)dt$ admet une limite finie quand x tend vers b, par valeurs inférieures.
Dans ce cas, on note $\int_a^b f(t)dt$ cette limite.

Vocabulaire : On prouvera d'abord que la limite existe, pour affirmer "l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ converge".

On pourra alors écrire $\int_a^b f(t)dt = \lim\limits_{\substack{x\to b\\ x<b}} \int_a^x f(t)dt$.

Dans le cas où la limite est infinie ou n'existe pas, on dit que l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ diverge !

➢ Cas d'une fonction f continue sur $[a,b[$ avec $b\in\mathbb{R}$ et prolongeable par continuité en b

On suppose que f admet une limite finie l en b et on définit son prolongement sur $[a,b]$:
$\tilde{f} : x\mapsto \begin{cases} f(x) & \text{si } x\in[a,b[\\ l & \text{si } x=b \end{cases}$.

$\tilde{f}$ est continue sur le segment $[a,b]$, elle admet donc une intégrale $\int_a^b \tilde{f}(t)dt$.

Considérons $F : x\mapsto \int_a^x f(t)dt$, définie sur $[a,b[$ et $H : x\mapsto \int_a^x \tilde{f}(t)dt$, définie et continue sur $[a,b]$.
On a $F(x)=H(x)$ pour tout $x\in[a,b[$. Or H est continue en b, donc elle admet $H(b)$ pour limite en b.
Par conséquent F admet $H(b)$ pour limite en b.
On conclut donc que $\int_a^b f(t)dt$ converge et $\int_a^b f(t)dt = H(b) = \int_a^b \tilde{f}(t)dt$.

Vocabulaire : dans ce cas, on dit que l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ est faussement impropre.

Exemple 1

a. Nature et valeur de $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}dt$.

La fonction $t\mapsto \frac{1}{t^2}$ est continue sur $[1,+\infty[$.

Prenons $x\geqslant 1$. On pose $F(x)=\int_1^x \frac{1}{t^2}dt$. On calcule $F(x) = -\frac{1}{x}+1$.

On sait que $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)=1$, donc la limite existe et est finie. On conclut que l'intégrale $\int_1^{+\infty}\frac{1}{t^2}dt$ converge et vaut 1.

b. Nature de $\int_0^1 \frac{1}{1-t}dt$.

La fonction $t\mapsto \frac{1}{1-t}$ est continue sur $[0,1[$.

Prenons $x\in[0,1[$. On pose $F(x)=\int_0^x \frac{1}{1-t}dt$. On calcule $F(x) = -\frac{1}{1-x}+1$.

On sait que $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)=+\infty$, donc la limite existe mais n'est pas finie. On conclut que l'intégrale $\int_0^1 \frac{1}{1-t}dt$ diverge.

c. Nature de $\int_{-1}^0 \frac{\sin t}{t}dt$.

La fonction $t\mapsto \frac{\sin t}{t}$ est continue sur $[-1,0[$. Or $\lim\limits_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=1$ car $\sin t \underset{0}{\sim} t$.

On peut donc prolonger la fonction par continuité en 0. On conclut que l'intégrale $\int_{-1}^0 \frac{\sin t}{t}dt$ converge comme intégrale d'une fonction continue sur le segment $[-1,0]$ (mais on ne sait pas sa valeur).

Proposition 1

> Soit f continue sur $[a,b[$ avec $a<b$ ou $b=+\infty$. Soit $c\in[a,b[$.
> L'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ est convergente si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_c^b f(t)dt$ est convergente.
> Dans ce cas, on a $\displaystyle\int_a^b f(t)dt=\int_a^c f(t)dt+\int_c^b f(t)dt$.

démo

2. Cas des fonctions de signe constant

On considère dans ce paragraphe une fonction $f : [a,b[\to\mathbb{R}$ avec $a<b$ ou $b=+\infty$.
On suppose de plus que f est de signe constant sur $[a,b[$. On traite le cas f **positive** ici. Dans le cas d'une fonction négative, on peut travailler avec $-f$ pour se ramener aux résultats énoncés ici.

> Soit f continue et positive sur un intervalle $[a,b[$.
>
> - L'application $F : \begin{array}{rcl}[a,b[& \to & \mathbb{R}\\ x & \mapsto & \displaystyle\int_a^x f(t)dt\end{array}$ est croissante sur $[a,b[$.
> - L'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ converge si et seulement si F est majorée sur $[a,b[$.

démo : On revient à la définition de fonction croissante : soient x, y dans $[a,b[$ tels que $x\leqslant y$.
On a $F(y)-F(x)=\displaystyle\int_x^y f(t)dt\geqslant 0$ par propriété de l'intégrale sur un segment d'une fonction continue.
Pour le deuxième point, on utilise le théorème de la limite monotone :
Soit F une fonction **croissante** sur un intervalle $[a,b[$ de $\mathbb{R}$.
On sait alors que F admet une limite à gauche en b :

- si F est majorée sur $[a,b[$ alors $\lim\limits_{x\to b^-}F(x)$ existe et est le réel $\sup_{x\in[a,b[}F(x)$.
- si F n'est pas majorée sur $[a,b[$ alors $\lim\limits_{x\to b^-}F(x)=+\infty$.

Proposition 2 ✰

> Soient f et g **continues** et **positives** sur $[a,b[$.
> Si $0\leqslant f\leqslant g$ sur $[a,b[$ et si $\displaystyle\int_a^b g(t)dt$ converge alors $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ converge.
> Dans ce cas, on a $\displaystyle\int_a^b f(t)dt\leqslant\int_a^b g(t)dt$.

démo : On suppose $0\leqslant f\leqslant g$ sur $[a,b[$ donc les fonctions $F : x\mapsto\displaystyle\int_a^x f(t)dt$ et $G : x\mapsto\displaystyle\int_a^x g(t)dt$ sont toutes les deux croissantes. Or $\displaystyle\int_a^b g(t)dt$ est supposée convergente, donc G est majorée par $\displaystyle\int_a^b g(t)dt$. Or pour tout $x\in[a,b[$ on a $F(x)\leqslant G(x)$, donc F est également majorée par $\displaystyle\int_a^b g(t)dt$ sur $[a,b[$. On en déduit que $F(x)$ admet une limite finie quand x tend vers b. L'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ converge donc.
Et en passant à la limite dans l'inégalité $F(x)\leqslant G(x)$ quand x tend vers b, on obtient l'inégalité sur les intégrales.
Le cas des fonctions négatives s'obtient en considérant $-f$ et $-g$: en donner un énoncé et le démontrer.

Remarque 1 :

- ➢ On montre de même que si $0\leqslant f\leqslant g$ sur $[a,b[$ et si $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ diverge alors $\displaystyle\int_a^b g(t)dt$ diverge.
- ➢ On peut se contenter de l'hypothèse $f\leqslant g$ au voisinage de b. En effet, si il existe $c\in[a,b[$ tel que $f\leqslant g$ sur $[c,b[$, on peut appliquer le théorème sur l'intervalle $[c,b[$: si $\displaystyle\int_c^b g(t)dt$ converge alors $\displaystyle\int_c^b f(t)dt$ converge. Mais la convergence avec la borne c équivaut à la convergence avec la borne a, on a donc le résultat voulu.
- ➢ Donnez un énoncé pour les fonctions continues et négatives sur $[a,b[$.

Exemple 2 : L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1-\sin t}{t^2}dt$ converge.

preuve : La fonction $f : t\mapsto\dfrac{1-\sin t}{t^2}$ est continue sur $[1,+\infty[$. De plus, $\forall t\in[1,+\infty[$, $0\leqslant 1-\sin t\leqslant 2$, donc $\forall t\in$

$[1,+\infty[$, $f(t) \leqslant \dfrac{1}{t^2}$.

f est une fonction positive sur $[1,+\infty[$, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,dt$ converge.

Donc, par théorème de comparaison pour la convergence d'intégrales de fonctions positives, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1-\sin t}{t^2}\,dt$ converge.

Proposition 3

> Soient f et g continues sur $[a,b[$ et positives.
> Si $f = O(g)$ au voisinage de b et si $\displaystyle\int_a^b g(t)\,dt$ converge alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ converge.

Proposition 4 ✰

> Soient f et g continues sur $[a,b[$, toutes les deux positives ou négatives au voisinage de b.
> Si $f \underset{b}{\sim} g$ alors $\displaystyle\int_a^b g(t)\,dt$ et $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ sont de même nature.

Exemple 3

Justifier que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \ln(1+\frac{1}{t^2})\,dt$ converge. Déterminer sa valeur.

➢ La fonction $f : t \mapsto \ln(1+\dfrac{1}{t^2})$ est continue sur $[1,+\infty[$.

De plus, $\ln(1+\dfrac{1}{t^2}) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^2}$. f est une fonction positive sur $[1,+\infty[$, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,dt$ converge.

Donc, par théorème de comparaison pour la convergence d'intégrales de fonctions positives, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \ln(1+\frac{1}{t^2})\,dt$ converge.

➢ Pour le calcul, on revient à la définition en posant, pour $x \geqslant 1$, $F(x) = \displaystyle\int_1^x \ln(1+\frac{1}{t^2})\,dt$. On effectue ensuite une intégration par parties en posant $u' : t \mapsto 1$ et $v : t \mapsto \ln(1+\dfrac{1}{t^2})$.

Les fonctions $u : t \mapsto t$ et v sont de classe C^1 sur $[1,x]$, et on a :

$F(x) = x\ln(1+\frac{1}{x^2}) - \ln 2 + \displaystyle\int_1^x \frac{2}{1+t^2}\,dt = x\ln(1+\frac{1}{x^2}) - \ln 2 + 2(\arctan(x) - \frac{\pi}{4})$.

On en déduit $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} F(x) = -\ln 2 + \frac{\pi}{2}$. Ainsi, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \ln(1+\frac{1}{t^2})\,dt = -\ln 2 + \frac{\pi}{2}$.

3. Sur un intervalle de la forme $]a,b]$ ou $]a,b[$

Cas des fonctions continues sur un intervalle du type $]a,b]$

Soit $f :]a,b] \to \mathbb{R}$ avec $a < b$ ou $a = -\infty$.

On suppose f continue sur $]a,b]$: f est donc continue sur $[x,b]$ pour tout $x \in]a,b]$. On peut donc définir l'application $F : x \mapsto \displaystyle\int_x^b f(t)\,dt$.

> **Définition** 2 : Soit f continue sur $]a,b]$.
> On dit que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ est convergente si la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_x^b f(t)\,dt$ admet une limite finie quand x tend vers a, par valeurs supérieures.
> Dans ce cas, on note $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ cette limite.

On montre que la convergence de l'intégrale ne dépend pas de la borne b : pour tout $c \in]a,b]$, l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ converge si et seulement si $\displaystyle\int_c^b f(t)\,dt$ converge.

Exemple 4

a. L'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}}\,dt$ converge et vaut 2.

La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{t}}$ est continue sur $]0,1]$.

Prenons $x \in]0,1]$. On pose $F(x) = \displaystyle\int_x^1 \frac{1}{\sqrt{t}}\,dt$. On calcule $F(x) = \left[2\sqrt{t}\right]_x^1 = 2-\sqrt{x}$.

On sait que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} F(x) = 2$, donc la limite existe et est finie. On conclut que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}}\,dt$ converge et vaut 2.

b. L'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \ln t\, dt$ converge et vaut -1.

La fonction $t \mapsto \ln t$ est continue sur $]0,1]$.

Prenons $x \in]0,1]$. On pose $F(x) = \displaystyle\int_x^1 \ln t dt$. On calcule $F(x) = [t\ln t - t]_x^1 = -1-(x\ln x - x)$.

On sait que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} F(x) = -1$, donc la limite existe et est finie. On conclut que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \ln t\, dt$ converge et vaut -1.

c. L'intégrale $\displaystyle\int_{-1}^0 \frac{1}{t^2-1}\, dt$ diverge.

La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t^2-1}$ est continue sur $]-1,0]$. Et pour $t \in]-1,0]$, $\dfrac{1}{t^2-1} = \frac{1}{2}(\dfrac{1}{t-1} - \dfrac{1}{t+1})$.

Prenons $x \in]-1,0]$. On pose $F(x) = \displaystyle\int_x^0 \frac{1}{t^2-1} dt$. On calcule $F(x) = \left[\frac{1}{2}\ln(\frac{1-t}{1+t})\right]_x^0 = -\frac{1}{2}\ln(\frac{1-x}{1+x})$.

On sait que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} F(x) = -\infty$, donc la limite existe mais n'est pas finie. On conclut que l'intégrale $\displaystyle\int_{-1}^0 \frac{1}{t^2-1} dt$ diverge.

Théorèmes de comparaison pour les fonctions de signe constant sur l'intervalle

Soit f continue et positive sur un intervalle $]a,b]$.

- L'application $F: \begin{array}{ccc}]a,b] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \displaystyle\int_x^b f(t)dt \end{array}$ est décroissante sur $]a,b]$.
- L'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ converge si et seulement si F est majorée sur $]a,b]$.

Proposition 5

Soit f et g continues et positives sur un intervalle $]a,b]$.
Si $0 \leqslant f \leqslant g$ sur $]a,b]$ et si $\displaystyle\int_a^b g(t)dt$ converge alors $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ converge.
Dans ce cas, on a $\displaystyle\int_a^b f(t)dt \leqslant \int_a^b g(t)dt$.

On déduit de ceci les propriétés de comparaison par $O(\,)$, par $o(\,)$ et par $\sim$, pour des fonctions continues et positives sur $]a,b]$.

Cas des fonctions continues sur un intervalle du type $]a,b[$

Définition 3 : ✰ Soit f continue sur $]a,b[$. Soit $c \in]a,b[$.
On dit que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ est convergente si et seulement si les deux intégrales $\displaystyle\int_a^c f(t)dt$ et $\displaystyle\int_c^b f(t)dt$ sont convergentes.
On définit alors la valeur de l'intégrale de f sur $]a,b[$ par $\displaystyle\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt$.

Exemple 5

a. L'intégrale $\displaystyle\int_{-2}^0 \frac{1}{t(t+2)}\, dt$ diverge.

La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t(t+2)}$ est continue sur $]-2,0]$. Et pour $t \in]-2,0]$, $\dfrac{1}{t(t+2)} = \frac{1}{2}(\dfrac{1}{t} - \dfrac{1}{t+2})$.

On étudie la convergence de deux nouvelles intégrales $\displaystyle\int_{-2}^{-1} \frac{1}{t(t-2)}\, dt$ et $\displaystyle\int_{-1}^0 \frac{1}{t(t-2)}\, dt$.

➢ Étude en -2 : Prenons $x \in]-2,-1]$. On pose $F(x) = \displaystyle\int_x^{-1} \frac{1}{t(t+2)} dt$. On calcule $F(x) = \left[\frac{1}{2}\ln(\frac{|t|}{t+2})\right]_x^{-1} = -\frac{1}{2}(\ln(\frac{|x|}{x+2})$.

On sait que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} F(x) = -\infty$, donc la limite existe mais n'est pas finie. On conclut que l'intégrale $\displaystyle\int_{-2}^{-1} \frac{1}{t(t+2)} dt$ diverge.

➢ L'étude en 0 est alors inutile puisque l'on peut, par définition, conclure que $\displaystyle\int_{-2}^0 \frac{1}{t(t+2)}\, dt$ diverge.

b. L'intégrale $\displaystyle\int_{-2}^2 \frac{1}{\sqrt{4-t^2}}\, dt$ converge et vaut

La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{4-t^2}}$ est continue sur $]-2,2[$.

On étudie la convergence de deux nouvelles intégrales $\displaystyle\int_{-2}^{0} \frac{1}{\sqrt{4-t^2}}\,dt$ et $\displaystyle\int_{0}^{2} \frac{1}{\sqrt{4-t^2}}\,dt$.

➢ Étude en -2 : Prenons $x \in]-2,0]$. On pose $F(x) = \displaystyle\int_{x}^{0} \frac{1}{\sqrt{4-t^2}}\,dt$. $F(x) = \displaystyle\int_{x}^{0} \frac{1}{\sqrt{1-(t/2)^2}}\,\frac{1}{2}dt = \left[\arcsin(\frac{t}{2})\right]_x^0 = -\arcsin(\frac{x}{2})$.

On sait que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} F(x) = \frac{\pi}{2}$, donc la limite existe et est finie. On conclut que l'intégrale $\displaystyle\int_{-2}^{0} \frac{1}{\sqrt{4-t^2}}\,dt$ converge et vaut $\dfrac{\pi}{2}$.

➢ Étude en 2 : elle se passe de la même manière, on montre ainsi que l'intégrale $\displaystyle\int_{0}^{2} \frac{1}{\sqrt{4-t^2}}\,dt$ converge et vaut $\dfrac{\pi}{2}$.

➢ On conclut que l'intégrale $\displaystyle\int_{-2}^{2} \frac{1}{\sqrt{4-t^2}}\,dt$ converge et vaut π (somme des deux intégrales trouvées).

Remarque 2 :

Soit f continue sur $]a,b[$, on pose Φ : $\begin{array}{ccc}]a,b[^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \to & \displaystyle\int_x^y f(t)\,dt \end{array}$. On peut montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ converge si et seulement si Φ admet une limite quand (x,y) tend vers (a,b).

Attention, il se peut que $\displaystyle\lim_{x\to a}\int_{-x}^{x} f(t)dt$ existe et soit finie sans que l'intégrale $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(t)dt$ ne converge.

Exemple : pour $f : t \mapsto \dfrac{t}{t^2-1}$*, chercher la nature de l'intégrale* $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(t)\,dt$*, puis chercher* $\displaystyle\lim_{x\to1}\int_{-x}^{x} f(t)dt$.

Cependant, si on a justifié que l'intégrale $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(t)dt$ converge alors $\displaystyle\lim_{x\to a}\int_{-x}^{x} f(t)dt = \int_{-a}^{a} f(t)dt$. On peut donc, après avoir prouvé la convergence de l'intégrale, utiliser $\displaystyle\int_{-x}^{x} f(t)dt$ pour calculer la valeur de l'intégrale.

4. Exemples de référence

Proposition 6 ✩

> Soient $\alpha \in \mathbb{R}$. Les fonctions $t \mapsto e^{-t}$ et $t \mapsto e^{-\alpha t}$ sont continues sur $[0,+\infty[$. La fonction $t \mapsto \ln t$ est continue sur $]0,1]$.
>
> - $\displaystyle\int_0^1 \ln t\,dt$ converge.
> - $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\,dt$ converge.
> - $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t}\,dt$ converge si et seulement si $\alpha > 0$.

démo : on revient à la définition et on s'appuie sur les primitives connues.

➢ Pour $x > 0$, $F(x) = \displaystyle\int_x^1 \ln t\,dt = [t\ln t - t]_x^1 = x\ln x - x + 1$. Donc ...

➢ Pour $x > 0$, $F(x) = \displaystyle\int_0^x e^{-t}\,dt = [-e^{-t}]_0^x = -e^{-x}+1$. Donc ...

➢ Pour $x > 0$, $F(x) = \displaystyle\int_0^x e^{-\alpha t}\,dt = [-\frac{1}{\alpha}e^{-\alpha t}]_0^x = \frac{1}{\alpha}\left(-e^{-\alpha x}+1\right)$. Or $\alpha > 0$ donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} e^{-\alpha x} = 0$. Donc ...

Proposition 7 ✩ *Intégrales de Riemann*

> La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t^\alpha}$ est continue sur $]0,+\infty[$ pour $\alpha \in \mathbb{R}$.
>
> - $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha}\,dt$ converge si et seulement si $\alpha < 1$.
> - $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\,dt$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

démo : La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t^\alpha}$ est continue sur $]0,+\infty[$.

On revient à la définition de la convergence d'une intégrale, avec pour $\alpha \neq 1$, $F : t \mapsto \dfrac{1}{(-\alpha+1)}\,\dfrac{1}{t^{\alpha-1}}$ une primitive de f.

Le comportement de $\dfrac{1}{x^{\alpha-1}}$ dépend de la position de α par rapport à 1 mais aussi de vers qui/quoi tend x.

Proposition 8 ☆ *Intégrales de "type Riemann"*

Soient $a,\ b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$. Les fonctions $t \mapsto \dfrac{1}{(t-a)^\alpha}$ est continue sur $]a,b]$ et $t \mapsto \dfrac{1}{(b-t)^\alpha}$ est continue sur $[a,b[$ pour $\alpha \in \mathbb{R}$.

- $\displaystyle\int_a^b \frac{1}{(t-a)^\alpha}\,dt$ converge si et seulement si $\alpha < 1$.
- $\displaystyle\int_a^b \frac{1}{(b-t)^\alpha}\,dt$ converge si et seulement si $\alpha < 1$.

démo : Par changement de variables, on se ramène à une intégrale de Riemann en 0.

➢ $t \mapsto \dfrac{1}{(t-a)^\alpha}$ est continue sur $]a,b]$. Posons $F(x) = \displaystyle\int_x^b \frac{1}{(t-a)^\alpha}\,dt$ pour $x \in]a,b]$.

➢ On effectue le changement de variables $u = t - a$ dans l'intégrale (d'une fonction continue sur un segment).

On a donc $F(x) = \displaystyle\int_{x-a}^{b-a} \frac{1}{u^\alpha}\,du$ (car ici $du = dt$ et notez le changement des bornes de l'intégrale).

➢ Or l'intégrale $\displaystyle\int_0^{b-a} \frac{1}{u^\alpha}\,du$ converge si et seulement si $\alpha < 1$.

Prenons $\alpha < 1$. On affirme donc que : $\displaystyle\lim_{y\to 0}\int_y^{b-a} \frac{1}{u^\alpha}\,du$ existe et est finie. Or $\displaystyle\lim_{x\to a} x - a = 0$, donc par composition de limites, $\displaystyle\lim_{x\to a}\int_{x-a}^{b-a} \frac{1}{u^\alpha}\,du$ existe et est finie. Ainsi on a prouvé que F admet une limite finie quand x tend vers a. L'intégrale $\displaystyle\int_a^b \frac{1}{(t-a)^\alpha}\,dt$ converge.

Au contraire, si $\alpha \geqslant 1$, on montre que l'intégrale diverge.

Exemple 6 : Déterminer la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^3 \frac{1}{\sqrt{9-t^2}}$.

➢ La fonction $f\ :\ t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{9-t^2}}$ est continue sur $[0,3[$. De plus, $\dfrac{1}{\sqrt{9-t^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{(3-t)(3+t)}} \underset{3}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{6(3-t)}}$.

f est une fonction positive sur $[0,3[$ et $\displaystyle\int_0^3 \frac{1}{\sqrt{3-t}}\,dt$ converge comme une intégrale "de type Riemann".

Donc, par théorème de comparaison pour la convergence d'intégrales de fonctions positives, $\displaystyle\int_0^3 \frac{1}{\sqrt{9-t^2}}\,dt$. converge.

Une stratégie qui peut s'avérer utile.

En utilisant les intégrales de Riemann et les théorèmes de comparaison pour des fonctions positives, on obtient les résultats suivants :

➢ Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. Soit $f\ :\ [a,+\infty[\to \mathbb{R}$. On suppose que f est continue et positive sur $[a,+\infty[$.

S'il existe $\alpha > 1$ tel que $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} t^\alpha f(t) = 0$ alors $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ converge.

S'il existe $\alpha \leqslant 1$ tel que $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} t^\alpha f(t) = +\infty$ alors $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ diverge.

➢ Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. Soit $f\ :]0,a] \to \mathbb{R}$. On suppose que f est continue et positive sur $]0,a]$.

S'il existe $\alpha < 1$ tel que $\displaystyle\lim_{t\to 0} t^\alpha f(t) = 0$ alors $\displaystyle\int_0^a f(t)\,dt$ converge.

S'il existe $\alpha \geqslant 1$ tel que $\displaystyle\lim_{t\to 0} t^\alpha f(t) = +\infty$ alors $\displaystyle\int_0^a f(t)\,dt$ diverge.

Exemple 7 : Déterminer la nature de $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln t}{t^{1/3}}\,dt$.

➢ La fonction $f\ :\ t \mapsto \dfrac{\ln t}{t^{1/3}}$ est continue sur $]0,1]$.

f est une fonction négative sur $]0,1]$ et on peut vérifier que $f(t) = o(\dfrac{1}{t^{2/3}})$ (car le quotient tend ves 0, le vérifier).

Or $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t^{2/3}}\,dt$ converge comme une intégrale de Riemann (en 0 avec $\alpha < 1$).

Donc, par théorème de comparaison pour la convergence d'intégrales de fonctions positives, $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln t}{t^{1/3}}\,dt$ converge.

5. Comparaison série-intégrale

Proposition 9

Soit $f : [a,+\infty[\to \mathbb{R}$, continue, décroissante et positive sur $[a,+\infty[$. Soit $n_0 \in \mathbb{N}\cap[a,+\infty[$.
La série $\sum_{n\geqslant n_0} f(n)$ converge si et seulement si l'intégrale $\int_{n_0}^{+\infty} f(t)dt$ converge.

démo : On a déjà vu que $\sum_{n\geqslant n_0} f(n)$ converge si et seulement si la suite $\left(\int_{n_0}^{n} f(t)dt\right)_{n\geqslant n_0}$ admet une limite finie.
Si l'intégrale $\int_{n_0}^{+\infty} f(t)dt$ converge, alors la fonction $F : x\mapsto \int_{n_0}^{x} f(t)\, dt$ admet une limite finie en $+\infty$, donc la suite $(F(n))_{n\geqslant n_0}$ converge.
Si la série $\sum_{n\geqslant n_0} f(n)$ converge alors la suite $(F(n))_{n\geqslant n_0}$ converge. Et puisque la fonction F est croissante (car f est positive), soit elle tend vers $+\infty$ soit elle tend vers une limite finie quand x tend vers $+\infty$. Dans ces deux cas, la suite $(F(n))_{n\geqslant n_0}$ a la même limite que F en $+\infty$. Le premier cas n'est donc pas possible.

II. PROPRIÉTÉS DES INTÉGRALES GÉNÉRALISÉES

1. Linéarité et relation de Chasles

Les propriétés sont énoncées pour des intervalles $[a,b[$ mais généralisables aux cas de $]a,b]$ ou $]a,b[$.

Proposition 10 *Linéarité*

Soit f continue sur $[a,b[$ avec $a<b$ ou $b=+\infty$.

- Pour tout $\lambda\in\mathbb{R}^*$, les intégrales $\int_a^b f(t)\, dt$ et $\int_a^b \lambda f(t)\, dt$ sont de même nature. Si elles convergent, on a $\int_a^b \lambda f(t)\, dt = \lambda\int_a^b f(t)\, dt$.
- Soit g continue sur $[a,b[$, si les deux intégrales $\int_a^b f(t)\, dt$ et $\int_a^b g(t)\, dt$ convergent alors $\int_a^b (f+g)(t)\, dt$ converge et $\int_a^b (f+g)(t)\, dt = \int_a^b f(t)\, dt + \int_a^b g(t)\, dt$.

démo : On revient à la définition de la convergence d'intégrale pour cette propriété.
Par exemple, pour $f,\ g$ continues sur $[a,b[$ telles que $\int_a^b f(t)\, dt$ et $\int_a^b g(t)\, dt$ convergent, on pose $F(x)=\int_a^x (f+g)(t)\, dt = \int_a^x f(t)\, dt + \int_a^x g(t)\, dt$.
Les deux termes écrits ont une limite finie quand x tend vers b, par hypothèse de convergence des intégrales, donc $F(x)$ a une limite finie quand x tend ves b. Donc $\int_a^b (f+g)(t)\, dt$ converge et en passant à la limite, quand x tend vers b dans l'égalité, on obtient $\int_a^b (f+g)(t)\, dt = \int_a^b f(t)\, dt + \int_a^b g(t)\, dt$.

Cette propriété exprime la linéarité de l'intégrale généralisée, mais attention à bien vérifier la convergence des deux intégrales pour une somme.

Exemple 8

a. Soit $f : t\mapsto \dfrac{1}{t^2(t^2+1)}$ continue sur $[1,+\infty[$. On remarque que $\forall t\in[1,+\infty[,\ f(t)=\dfrac{1}{t^2}-\dfrac{1}{1+t^2}$.
De plus les intégrales $\int_1^{+\infty} \dfrac{1}{1+t^2}\, dt$ et $\int_1^{+\infty}\dfrac{1}{t^2}\, dt$ convergent.
Donc $\int_1^{+\infty} f(t)\, dt$ converge et $\int_1^{+\infty} f(t)\, dt = \int_1^{+\infty}\dfrac{1}{t^2}\, dt - \int_1^{+\infty}\dfrac{1}{1+t^2}\, dt = 1-\dfrac{\pi}{4}$.

b. Soit $f : t\mapsto \dfrac{1}{t(t+1)}$ continue sur $[1,+\infty[$. On remarque que $\forall t\in[1,+\infty[,\ f(t)=\dfrac{1}{t}-\dfrac{1}{1+t}$. Mais les intégrales $\int_1^{+\infty}\dfrac{1}{1+t}\, dt$ et $\int_1^{+\infty}\dfrac{1}{t}\, dt$ divergent...
Revenons à la définition de la convergence d'une intégrale :
soit $x>1$, on calcule $\int_1^x f(t)\, dt = \int_1^x \dfrac{1}{t}-\dfrac{1}{1+t}\, dt = \int_1^x \dfrac{1}{t}\, dt - \int_1^x\dfrac{1}{1+t}\, dt = \ln x - \ln(x+1)+\ln 2$.
Et on cherche si cette expression a une limite quand x tend vers $+\infty$.
On prouve ainsi que l'intégrale converge et $\int_1^{+\infty} f(t)\, dt = \ln 2$.

Proposition 11 *Positivité*

Soient f et g continues sur $[a,b[$ avec $a<b$ ou $b=+\infty$. On suppose que les intégrales $\int_a^b f(t)\ dt$ et $\int_a^b g(t)\ dt$ convergent.

- Si $f \geqslant 0$ sur $[a,b[$ alors $\int_a^b f(t)\ dt \geqslant 0$.
- Si $f \leqslant g$ sur $[a,b[$ alors $\int_a^b f(t)\ dt \leqslant \int_a^b g(t)\ dt$

démo en revenant à la définition et en utilisant les propriétés de l'intégrale sur un segment.

Proposition 12 *Relation de Chasles*

Soit f continue sur un intervalle I de la forme $[a,b]$, $[a,b[$, $]a,b]$ ou $]a,b[$ (avec $a=-\infty$ ou $a<b$ ou $b=+\infty$). On suppose que l'intégrale $\int_a^b f(t)\ dt$ converge.

Pour tout $c \in I$, les intégrales $\int_a^c f(t)\ dt$ et $\int_c^b f(t)\ dt$ convergent et on a

$\int_a^b f(t)\ dt = \int_a^c f(t)\ dt + \int_c^b f(t)\ dt.$

2. Changement de variables

Proposition 13 ✩ *Théorème de changement de variables*

Soient f continue sur $]a,b[$ et $\varphi\ :\ ]\alpha,\beta[\to]a,b[$ bijective, strictement croissante et de classe C^1.
Les intégrales $\int_a^b f(t)\ dt$ et $\int_\alpha^\beta f(\varphi(u))\ \varphi'(u)\ du$ sont de même nature et égales en cas de convergence.

démo : On montre d'abord le résultat sur un intervalle du type $[a,b[$. On suppose f continue sur $[a,b[$, et φ possède les propriétés énoncées. φ est donc une bijection de $[\alpha,\beta[$ sur $[a,b[$.

➞ Supposons que $\int_\alpha^{+\infty} f(\varphi(u))\ \varphi'(u)\ du$ converge.

Soit $x \in [a,b[$, il existe un unique $y \in [\alpha,\beta[$ tel que $\varphi(y)=x$. On a donc $y=\varphi^{-1}(x)$ et $y \underset{x\to b}{\to} \beta$.

φ est de classe C^1 de $[\alpha,y]$ dans $[a,x]$, et on peut donc appliquer le changement de variable de l'intégrale sur un segment : $\int_a^x f(t)\ dt = \int_\alpha^y f(\varphi(u))\ \varphi'(u)\ du$ (en posant $\varphi(u)=t$).

On sait que $\lim_{x\to b} \varphi^{-1}(x)=\beta$ et que $\int_\alpha^y f(\varphi(u))\ \varphi'(u)\ du$ admet une limite finie quand y tend vers β, donc $\int_a^x f(t)\ dt$ admet cette même limite finie quand x tend vers b.

L'intégrale converge et en passant à la limite on obtient $\int_a^b f(t)\ dt = \int_\alpha^\beta f(\varphi(u))\ \varphi'(u)\ du.$

➞ On suppose maintenant que $\int_a^b f(t)\ dt$ converge. On reprend le même raisonnement en partant de $y \in [\alpha,\beta[$. On définit $x \in [a,b[$ tel que $\varphi(y)=x$, on a à nouveau $\int_a^x f(t)\ dt = \int_\alpha^y f(\varphi(u))\ \varphi'(u)\ du$ et on conclut de la même manière.

➞ On prouve de même le résultat sur un intervalle du type $]a,b]$ et on en déduit le résultat pour les intervalles $]a,b[$.

Remarque 3 :

➢ Que dire si φ est décroissante ? adapter la démonstration précédente.

➢ Pour utiliser ce théorème, il faut d'abord prouver qu'une intégrale converge, puis écrire l'égalité. Le plus simple est souvent de revenir à des intégrales sur un segment, en revenant à la définition d'intégrale convergente (comme dans la preuve donc).

3. Intégration par parties

Proposition 14 *Théorème d'intégration par parties*

Soient f et g de classe C^1 sur un intervalle I du type $]a,b[$, $[a,b[$ ou $]a,b]$.
On suppose que la fonction fg admet des limites finies en a et en b.
On note $[fg]_a^b = \lim\limits_{x\to b^-}(fg)(x) - \lim\limits_{x\to a^+}(fg)(x)$.
Alors les intégrales $\displaystyle\int_a^b f(t)g'(t)\,dt$ et $\displaystyle\int_a^b f'(t)g(t)\,dt$ sont de même nature et, en cas de convergence,

$$\int_a^b f(t)g'(t)\,dt = [fg]_a^b - \int_a^b f'(t)g(t)\,dt\,.$$

démo : On démontre le résultat pour $I = [a,b[$.
On suppose donc que f et g sont de classe C^1 sur $[a,b[$ et que la fonction fg admet des limites finies en a et b.
Soit $x \in [a,b[$, f et g étant de classe C^1 sur $[a,x]$, on effectue un intégration par parties sur le segment $[a,x]$:

$$\int_a^x f(t)g'(t)\,dt = \underbrace{(fg)(x)-(fg)(a)}_{\text{admet une limite finie qd } x \text{ tend vers } b} - \int_a^x f'(t)g(t)\,dt.$$

La nature des intégrales à gauche et à droite est donc la même. Dans le cas de la convergence, on obtient l'égalité souhaitée en passant à la limite.

Remarque 4 : Pour utiliser ce théorème, il faut d'abord prouver que le crochet a un sens, donc que les limites $\lim\limits_{x\to b^-}(fg)(x)$ et $\lim_{x\to a^+}(fg)(x)$ existent et sont finies. Et aussi que l'une des intégrales converge. Le plus simple est souvent de revenir à des intégrales sur un segment, en revenant à la définition d'intégrale convergente (comme dans la preuve donc).

Exemple 9 ✰

Montrer, en utilisant une intégration par parties, que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\cos(t)}{t}\,dt$ converge.

➢ La fonction $t \mapsto \dfrac{\cos(t)}{t}$ est continue sur $[1,+\infty[$.

➢ On pose pour $x \geqslant 1$, $F(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{\cos(t)}{t}\,dt$ et on effectue une intégration par parties avec $\begin{array}{ll} u(t) = \dfrac{1}{t} & u'(t) = -\dfrac{1}{t^2} \\ v'(t) = \cos t & v(t) = 1+\sin t \end{array}$.

Les fonctions u et v sont de classe C^1 sur $[1,x]$ donc $F(x) = \left[\dfrac{1+\sin t}{t}\right]_1^x + \displaystyle\int_1^x \frac{1+\sin t}{t^2}\,dt = \frac{1+\sin x}{x} - (1+\sin 1) + g(x)$.

➢ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1+\sin x}{x}$ existe et vaut 0.

De plus, on montre que $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1+\sin t}{t^2}\,dt$ converge par comparaison de fonctions positives(preuve laissée au lecteur).

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ existe et est finie.

En conclusion, $F(x)$ admet une limite finie quand x tend vers $+\infty$. Donc $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\cos(t)}{t}\,dt$ converge.

III. INTÉGRABILITÉ D'UNE FONCTION SUR UN INTERVALLE

On considère une fonction f définie et continue sur un intervalle I et à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On considère la fonction $|f|$ (valeur absolue ou module de f) : c'est une fonction de I dans $\mathbb{R}$ qui est continue et positive sur I. On peut donc utiliser les paragraphes précédents pour parler de son intégrale sur l'intervalle I.

1. Définition

Définition 4 : ✰ *Fonction intégrable*
Soit f continue sur un intervalle I, à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On note $a = \inf(I)$ et $b = \sup(I)$.
On dit que f est intégrable si l'intégrale $\displaystyle\int_a^b |f(t)|\,dt$ est convergente.

Proposition 15 ✰

Soit f continue sur un intervalle I, à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On note $a = \inf(I)$ et $b = \sup(I)$.
Si f est intégrable sur I alors l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ converge.
On note alors cette intégrale $\displaystyle\int_I f(t)\,dt$.

démo : *Faire un dessin pour visualiser les représentations graphiques de f_+ et f_- à partir de celle de f.*

➢ Dans le cas où f est à valeurs dans $\mathbb{R}$, on note $f_- = \frac{1}{2}(f - |f|) = \min(f, 0)$ et $f_+ = \frac{1}{2}(f + |f|) = \max(f, 0)$. On a ainsi $f = f_- + f_+$ et la fonction f_- est continue et négative sur I, la fonction f_+ est continue et positive sur I.
On remarque que $0 \leqslant f_+ \leqslant |f|$, et puisque $|f|$ admet une intégrale convergente sur I, on déduit grâce aux théorèmes de comparaison des fonctions à valeurs positives, que f_+ admet une intégrale convergente sur I.
De même en travaillant avec $-f_-$, on a $0 \leqslant -f_- \leqslant |f|$, donc l'intégrale de f_- sur I est convergente.
f est la somme de deux fonctions admettant une intégrale convergente, donc son intégrale sur I converge.
➢ Dans le cas de f continue sur I à valeurs dans $\mathbb{C}$, on raisonne avec les parties réelles $\mathrm{Re}(f)$ et imaginaires $\mathrm{Im}(f)$ de f.
$\mathrm{Re}(f)$ est une fonction continue sur I, à valeurs réelles. De plus $|\mathrm{Re}(f)| \leqslant |f|$, donc par comparaison de fonctions à valeurs réelles positives, on sait que $|\mathrm{Re}(f)|$ admet une intégrale convergente sur I. On peut donc appliquer le premier point concernant les fonctions à valeurs réelles pour conclure que $\int_a^b \mathrm{Re}(f)(t)\, dt$ converge.
De même, on justifie que $\int_a^b \mathrm{Im}(f)(t)\, dt$ converge.
Et cela permet de conclure que $\int_a^b f(t)\, dt$ converge (et vaut $\int_a^b \mathrm{Re}(f)(t)\, dt + i\int_a^b \mathrm{Im}(f)(t)\, dt$).

Exemple 10

- La fonction $t \mapsto \dfrac{\sin t}{t^2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$.
  Preuve : il suffit de considérer $\displaystyle\int_1^{+\infty} \left|\frac{\sin t}{t^2}\right| dt$ et de montrer que cette intégrale converge.
- La fonction $t \mapsto \dfrac{e^{it}}{\sqrt{t}}$ est intégrable sur $]0, 1[$.
  Preuve : il suffit de considérer $\displaystyle\int_0^1 \left|\frac{e^{it}}{\sqrt{t}}\right| dt$ et de montrer que cette intégrale converge. On lira bien "module" et on se rappellera que $\forall t \in \mathbb{R}$, $|e^{it}| = 1$.

2. Propriétés

On note I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Proposition 16

- Soient f et g deux fonctions continues, intégrables sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$ et soit $\lambda \in \mathbb{K}$.
  La fonction $f + \lambda g$ est intégrable sur I et $\int_I (f + \lambda g)(t)\, dt = \int_I f(t)\, dt + \lambda \int_I g(t)\, dt$.
- Soit f une fonction continue, intégrable sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$. Si $f \geqslant 0$ sur I alors $\int_I f(t)\, dt \geqslant 0$.
- Soient f et g deux fonctions continues, intégrables sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$.
  Si $f \leqslant g$ sur I alors $\int_I f(t)\, dt \leqslant \int_I g(t)\, dt$.

Ces propriétés traduisent le fait que :
➢ l'ensemble des applications continues et intégrables sur I est un $\mathbb{K}$−espace vectoriel.
➢ l'application $f \mapsto \int_I f(t)\, dt$ est une forme linéaire sur cet espace vectoriel.
➢ Les points deux et trois sont appelés positivité et croissance de l'application $f \mapsto \int_I f(t)\, dt$.

Si I est un segment alors l'espace des applications continues et intégrables sur I est exactement l'ensemble des fonctions continues sur I : une fonction continue sur un segment est intégrable sur ce segment.

Proposition 17

Soit f une fonction continue et intégrable sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$.
On a $\left|\int_I f(t)\, dt\right| \leqslant \int_I |f(t)|\, dt$.

démo : ➢ Cas d'une fonction f à valeurs dans $\mathbb{R}$

f est supposée intégrable sur I, donc les intégrales $\int_I |f(t)|\, dt$ (c'est l'intégrale $\int_a^b |f(t)|\, dt$ où a et b sont les extrêmités de I) et $\int_I f(t)\, dt$ convergent. $|f|$ et f sont des fonctions continues et intégrables sur I. De plus, $-|f| \leqslant f \leqslant |f|$ sur I, donc par croissance de l'intégrale, on a $\int_I -|f(t)|\, dt \leqslant \int_I f(t)\, dt \leqslant \int_I |f(t)|\, dt$, ce qui conduit à $\left|\int_I f(t)\, dt\right| \leqslant \int_I |f(t)|\, dt$.

➢ Cas d'une fonction f à valeurs dans $\mathbb{C}$

➙ On écrit le nombre complexe $\int_I f(t)\,dt$ sous forme exponentielle : il existe $\rho \in \mathbb{R}_+$ et $\theta \in \mathbb{R}$ tels que $\int_I f(t)\,dt = \rho e^{i\theta}$.
On pose alors $f_1 = e^{-i\theta} f$, f_1 est une fonction continue sur I et $|f_1| = |f|$ donc f_1 est intégrable sur I, comme f.
On a de plus, $\int_I f_1 = \int_I e^{-i\theta} f = e^{-i\theta} \int_I f = \rho \in \mathbb{R}_+$.

➙ Montrons que $\left|\int_I f_1(t)\,dt\right| \leqslant \int_I |f_1(t)|\,dt$. On a $\int_I f_1 = \int_I \mathrm{Re}(f_1) + i\int_I \mathrm{Im}(f_1)$, mais puisque $\int_I f_1 \in \mathbb{R}_+$, on a en fait $\int_I f_1 = \int_I \mathrm{Re}(f_1)$. Donc $\left|\int_I f_1(t)\,dt\right| = \int_I \mathrm{Re}(f_1)(t)\,dt \leqslant \int_I |f_1|(t)\,dt$ (par le résultat sur les fonctions à valeurs réelles et en utilisant $\mathrm{Re}(f_1) \leqslant |f_1|$). On conclut que $\left|\int_I f_1(t)\,dt\right| \leqslant \int_I |f_1|(t)\,dt$.

➙ On peut en déduire le résultat sur f : on a $\left|\int_I f(t)\,dt\right| = \rho = \int_I f_1 = \left|\int_I f_1\right|$.
Et $|f_1| = |f|$ donc $\int_I |f(t)|\,dt = \int_I |f_1(t)|\,dt$. De l'inégalité obtenue sur f_1, on déduit donc le résultat sur f.

Proposition 18

> Soit f continue et intégrable sur un intervalle I.
> Si $\int_I |f(t)|\,dt = 0$ alors f est la fonction nulle sur I.

démo : La fonction $|f|$ est continue et positive sur I, on montre que si elle n'est pas la fonction nulle sur I, alors son intégrale sur I est non nulle. Supposons donc qu'il existe $x_0 \in I$ tel que $f(x_0) \neq 0$.
Donc $|f|$ admet pour limite $|f(x_0)| > 0$ quand x tend vers x_0. En revenant à la définition de la limite, on prouve qu'il existe $\eta > 0$ tel que $\forall x \in I \cap]x_0 - \eta, x_0 + \eta[$, $|f(x)| > \frac{|f(x_0)|}{2} > 0$. (*à détailler*).
L'ensemble $I \cap]x_0 - \eta, x_0 + \eta[$ est un intervalle de longueur $\delta > 0$ (*à détailler*).
On a donc $\int_I |f(t)|\,dt \geqslant \int_{I\cap]x_0-\eta,x_0+\eta[} |f(t)|\,dt \geqslant \frac{|f(x_0)|}{2}\delta > 0$ (*à détailler*).
Donc si $|f|$ n'est pas la fonction nulle sur I, son intégrale est non nulle : on conclut par contraposée.

3. Comparaison

Proposition 19 ✰

> Soit f et g continues sur $[a,b[$, à valeurs dans $\mathbb{K}$. Si g est intégrable sur $[a,b[$ et si $f(t) \underset{b}{=} O(g(t))$ alors f est intégrable sur $[a,b[$.

démo

On pourra remplacer l'hypothèse $f(t) \underset{b}{=} O(g(t))$ par $f(t) \underset{b}{=} o(g(t))$.
On énonce un résultat similaire pour des fonctions intégrables sur $]a,b]$.

Rappels des primitives usuelles (à compléter)

paramètres	Fonction f	Primitive F	Intervalle
$\alpha \in \mathbb{C}^*$ fixé	$x \mapsto e^{\alpha x}$	$x \mapsto \frac{1}{\alpha}e^{\alpha x} + C$	$\mathbb{R}$
u fonction	$u'e^u$	e^u	
$\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$	$x \mapsto x^\alpha$	$x \mapsto \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$	$\mathbb{R}_+^*$
u fonction	$u'u^\alpha$	$\frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	

paramètres	Fonction f	Primitive F	Intervalle
$n \in \mathbb{N}$	$x \mapsto x^n$	$x \mapsto \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C$	$\mathbb{R}$
$n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$	$x \mapsto \dfrac{1}{x^n} = x^{-n}$	$x \mapsto \dfrac{1}{(1-n)x^{n-1}} + C$	$\mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$
	$x \mapsto \dfrac{1}{x}$	$x \mapsto \ln\lvert x\rvert + C$	$\mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$
u fonction ne s'annulant pas	$\dfrac{u'}{u}$		
	$x \mapsto \ln x$	$x \mapsto x\ln x - x + C$	$\mathbb{R}_+^*$
u fonction strictement positive	$u' \ln u$		
	$x \mapsto \sin x$	$x \mapsto -\cos x + C$	$\mathbb{R}$
u fonction	$u' \sin u$		
	$x \mapsto \cos x$	$x \mapsto \sin x + C$	$\mathbb{R}$
u fonction	$u' \cos u$		
	$x \mapsto \mathrm{sh} x$	$x \mapsto \mathrm{ch} x + C$	$\mathbb{R}$
	$x \mapsto \mathrm{ch} x$	$x \mapsto \mathrm{sh} x + C$	$\mathbb{R}$
	$x \mapsto \dfrac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$	$x \mapsto \tan x + C$	$]\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + (k+1)\pi[,\ k \in \mathbb{Z}$
	$x \mapsto \dfrac{1}{\mathrm{ch}^2 x} = 1 - \mathrm{th}^2 x$	$x \mapsto \mathrm{th} x + C$	$\mathbb{R}$
	$x \mapsto \dfrac{1}{\sin^2 x}$	$x \mapsto -\dfrac{\cos x}{\sin x} + C$	$]k\pi, (k+1)\pi[,\ k \in \mathbb{Z}$
	$x \mapsto \dfrac{1}{\mathrm{sh}^2 x}$	$x \mapsto \dfrac{\mathrm{ch}(x)}{\mathrm{sh}(x)} + C$	$\mathbb{R}_+^*$ou $\mathbb{R}_-^*$
	$x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$	$x \mapsto \arctan x + C$	$\mathbb{R}$
u fonction	$\dfrac{u'}{1+u^2}$		
	$x \mapsto \dfrac{1}{1-x^2}$	$x \mapsto \dfrac{1}{2}\ln\left\lvert\dfrac{1+x}{1-x}\right\rvert + C$	$]-\infty,-1[,]-1,1[,]1,+\infty[$
u fonction	$\dfrac{u'}{1-u^2}$		
	$x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$x \mapsto \arcsin x + C$	$]-1,1[$
u fonction	$\dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$		