Question 1 : On considère $a,\ b$ deux éléments de $\overline{\mathbb{R}}$ tels que $a < b$. Cela signifie que a et b peuvent être des réels ou $\pm\infty$.

1. Soit f continue sur l'intervalle $[a, b[$. Donner la définition de $\int_a^b f(t)\,dt$ converge.
2. Soit f continue sur l'intervalle $]a, b]$. Donner la définition de $\int_a^b f(t)\,dt$ converge.
3. Soit f continue sur $]a, b[$. Donner la définition de $\int_a^b f(t)\,dt$ converge.
4. Soit f continue sur $\mathbb{R}$. Donner la définition de $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt$ converge.

Exercice 1 *Exercice pour utiliser la définition (voir exemple 1, 4 et 5 du poly)*

1. Nature et éventuellement valeur de $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt$.
2. Nature et éventuellement valeur de $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}dt$.
3. Nature et éventuellement valeur de $\int_0^1 \frac{1}{t^3}dt$.
4. Nature et éventuellement valeur de $\int_0^1 \frac{1}{t}\,dt$.
5. Nature et éventuellement valeur de $\int_{-\infty}^0 e^{2t}dt$.
6. Nature et éventuellement valeur de $\int_{-\infty}^3 \frac{1}{t^2}dt$.
7. Nature et éventuellement valeur de $\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,dt$.
8. Nature et éventuellement valeur de $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\,dt$.

Question 2 : **Énoncés des théorèmes de comparaison**
Compléter les énoncés

1. Soit continues sur $[a, b[$ et sur $[a, b[$.
   Si $f \leqslant g$ sur $[a, b[$ (ou au voisinage de b) et si
   alors

2. Si f et g sont … et … sur $[a, b[$ et $f \underset{b}{\sim} g$, alors

3. Donner les autres énoncés en les classant (convergence/divergence, par exemple, ou type de comparaison).

Question 3 : **Comment comprendre/ mémoriser la preuve du théorème de comparaison ?**

1. Soient f et g positives (hyp 0), continues sur $[a, b[$. Rappeler les hypothèses du théorème de comparaison par inégalité :
   On suppose que (hyp 1) et (hyp 2)
   Compléter les étapes suivantes
   - $\int_a^b f(t)\,dt$ converge si et seulement si (def)
     On doit donc montrer que
   - L'application $F : x \mapsto \int_a^x f(t)\,dt$ est . On sait donc qu'elle admet une limite en b.
     De plus, $G : x \mapsto \int_a^x g(t)\,dt$ admet car
   - $f \leqslant g$ (au voisinage de b) alors pour tout $x \in [a, b[$, … $\leqslant$ … .
     Précisez la propriété que vous avez utilisé ici.

- On en déduit que F est majorée sur $[a, b[$. En effet ...
  Donc F admet une limite finie en b, ce qui prouve bien que $\int_a^b f(t)\, dt$ converge.

2. Des questions à se poser sur cette preuve :
➙ où intervient l'hypothèse f positive ? À quoi sert-elle ?
➙ où intervient l'hypothèse $\int_a^b g(t)\, dt$ converge ?
➙ où intervient l'hypothèse $f \geqslant g$? Que veut-elle dire ?

3. S'entraîner à la refaire, avec le guide puis sans le guide !

Exercice 2 *Exercice pour utiliser les théorèmes de comparaison (voir exemple 2, 3 , 6, 7 du poly)*
Étudier la nature des intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\, dt$

2. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \ln(\cos(\frac{1}{t}))\, dt.$

3. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{x}{\sqrt{1-x^3}}\, dx.$

4. $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\, dx.$

5. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+2x}}\, dx$

6. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\arctan(x-1)}{\sqrt[3]{(x-1)^4}}\, dx$

Question 4 : **Intégrales de référence**

1. Donner une liste d'intégrales de référence pour la convergence "en 0".

2. Donner une liste d'intégrales de référence pour la convergence "en $+\infty$".

Question 5 : **Fonctions intégrables**

1. Rappeler la définition de "f est intégrable sur I" (préciser le cadre : que doit-on prendre pour I ? Quelle est l'hypothèse indispensable sur f ?)

2. Énoncer le résultat liant l'intégrabilité d'une fonction et la convergence d'une intégrale.

3. Énoncer le résultat de comparaison entre "la valeur absolue de l'intégrale et l'intégrale de la valeur absolue".

Question 6 : **Comment étudier la nature d'une intégrale ?**

- Proposer une stratégie pour l'étude de la nature d'une intégrale. On donne la première étape indispensable :
  ➢ f est continue sur ...
  ➢ que peut-on faire et à quelle condition ?
  • • •
  (on peut différencier les cas - pour une étude en $b \in \mathbb{R}$? - pour une étude en $+\infty$?) etc.

- Repérer dans les exercices la formulation des questions qui amènent à étudier la convergence d'une intégrale.

Question 7 : **Calculs d'intégrales pour des fonctions continues sur un segment**

1. Énoncé du théorème d'intégration par parties pour une intégrale sur un segment.

2. Énoncé (ou description "en pratique" du procédé") du théorème de changement de variables pour une intégrale sur un segment.

Question 8 : **Des questions**
Préparer trois questions (au moins) sur le poly de cours.