Analyse 2 : Intégrale d'une fonction continue sur un intervalle

➢ Énoncés à connaître

1. Énoncé du théorème d'intégration par parties (*avec les hypothèses !*), pour une intégrale de fonction continue sur $[a,b]$ (segment).

2. Pour f continue sur $[a,b[$, définition de $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ converge.

3. Pour f continue sur $\mathbb{R}$, définition de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt$ converge.

4. Résultat**s** sur les intégrales de Riemann (*Trois attendus*).

5. Énoncé du théorème de comparaison par inégalité pour la convergence des intégrales (cas convergent, cas divergent). *Trois hypothèses*

6. Énoncé du théorème de comparaison par équivalence pour la convergence des intégrales.

7. Énoncé du théorème de changement de variables.

8. Propriétés des intégrales convergentes, traduire les termes suivants :

- linéarité
- positivité
- croissance
- relation de Chasles

9. Définition de fonction intégrable sur un intervalle.

10. Comparaison valeur absolue d'une intégrale et intégrale de la valeur absolue.

➢ Démonstrations à travailler

1. ✰ Démonstration du théorème de comparaison par inégalité (pour la convergence d'intégrale).

2. ✰ Démonstration des résultats sur les intégrales de Riemann.

3. ✔ Démonstration de la relation de Chasles (dans le cas d'un intervalle $[a,b[$ par exemple).

4. ✔ Démonstration de la linéarité de l'intégrale sur un intervalle donné.

5. ✰ Pratique de la comparaison série-intégrale.

6. ✇ Démonstration du théorème de changement de variables.

7. ✰ Démonstration de la convergence de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt$ (voir ex 9 du poly).

8. ✰ Démonstration de : si f est intégrable sur un intervalle I alors l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ converge (pour $a = \inf(I)$ et $b = \sup(b)$). On note cette dernière intégrale $\displaystyle\int_I f$.

9. ✔ Démonstration de : Si f est intégrable sur I, alors $\displaystyle\left|\int_I f\right| \leqslant \int_I |f|$.

10. ✇ Démonstration de : Soit f continue et intégrable sur un intervalle I. Si $\displaystyle\int_I |f(t)|\,dt = 0$ alors f est la fonction nulle sur I.