I. NOTION DE SÉRIE NUMÉRIQUE

1. Définitions et exemples

Définition 1 : Soit (u_n) une suite à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
La série de terme général u_n est la suite $\left(\sum_{k=0}^{n} u_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$. On la note $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ ou $\sum u_n$.

Vocabulaire ✰

- Pour $N \in \mathbb{N}$, $S_N = \sum_{n=0}^{N} u_n$ est la **somme partielle de rang** N de la série.
  La série $\sum u_n$ est donc la suite $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$.

- On dit que la série $\sum u_n$ **converge** si la suite des sommes partielles $(S_N)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. On dit qu'elle diverge sinon (elle peut alors tendre vers $+\infty$ ou $-\infty$, elle peut aussi ne pas avoir de limite).
  Étudier la nature d'une série, c'est décider de la convergence ou non de cette suite.

- Si la série de terme général u_n converge, on note
  $S = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ sa limite dans $\mathbb{K}$, appelée **la somme de la série**. Donc $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=0}^{N} u_n$.
  Dans ce cas, on définit aussi pour $N \in \mathbb{N}$,
  le **reste de rang** N par $R_N = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n - \sum_{n=0}^{N} u_n$, il est noté $\sum_{n=N+1}^{+\infty} u_n$. On vérifie que $R_N = \lim_{p\to+\infty} \sum_{n=N+1}^{p} u_n$.

Remarque 1 : On considère parfois les séries définies à partir d'un rang n_0,
c'est-à-dire que $\sum_{n\geqslant n_0} u_n$ est la suite $\left(\sum_{n=n_0}^{N} u_n\right)_{N\geqslant n_0}$.
On peut changer un nombre fini de termes de la suite u_n sans changer la nature de la série $\sum u_n$. En particulier, on peut considérer les sommes à partir d'un rang n_0 au lieu du rang 0 (cela peut cependant changer la somme, c'est-à-dire la valeur de la limite, lorsque la série converge). On pourra noter la série $\sum_{n\geqslant n_0} u_n$ dans ce cas.

Exemple 1 ✰

a. Une série géométrique : La série $\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{2^n}$ est convergente. Sa somme vaut 2. La série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{2^n}$ est convergente, de somme vaut 1.

Considérons les sommes partielles $S_N = \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{2^n}$, pour $N \in \mathbb{N}$.
En reconnaissant la somme des premiers termes d'une suite géométrique de raison différente de 1, on peut exprimer S_N en fonction de N : $S_N = \dfrac{1-\frac{1}{2^{N+1}}}{1-\frac{1}{2}} = 2(1-\frac{1}{2^{N+1}})$. La suite (S_N) converge donc vers 2 quand N tend vers $+\infty$.
En déduire le deuxième résultat énoncé.

b. La série harmonique : La série $\sum \frac{1}{n}$ diverge.

- pour $N \in \mathbb{N}^*$, on note $S_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}$. La suite $(S_N)_{N\in\mathbb{N}^*}$ est croissante donc elle admet une limite L.
- Soit $N \in \mathbb{N}$, on écrit $S_{2N} - S_N = \sum_{n=N+1}^{2N} \frac{1}{n}$.

Or $\forall n \in [\![N+1, 2N]\!]$, $\frac{1}{n} \geqslant \frac{1}{2N}$, donc en sommant ces inégalité, on prouve que $S_{2N} - S_N \geqslant \frac{1}{2}$. Or $\lim_{N\to+\infty} S_N = \lim_{N\to+\infty} S_{2N} = L$, donc L n'est pas un réel sinon on aurait $\lim_{N\to+\infty} S_{2N} - S_N = L - L = 0$.
- La suite (S_N) ne tend donc pas vers une limite finie. Donc, la suite (S_n) admet $+\infty$ pour limite.

c. Une série télescopique : La série de terme général $\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$ converge vers 1.
En effet, on peut calculer les sommes partielles pour $N \geqslant 2$:
$S_N = \sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{N}$ car c'est une somme télescopique.

Donc la suite $(S_N)_{N\geqslant 2}$ admet 1 pour limite.
En remarquant que $\dfrac{1}{n-1}-\dfrac{1}{n}=\dfrac{1}{n(n-1)}$, on conclut que $\boxed{\displaystyle\sum_{n\geqslant 2}\frac{1}{n(n-1)} \text{ converge}}$.

d. La série exponentielle : pour tout $x\in\mathbb{R}$, la série $\sum \dfrac{x^n}{n!}$ converge. Sa somme est e^x.
La démonstration sera faite en exercice.

Proposition 1 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle ou complexe.
Soit $n_0\in\mathbb{N}$. Les séries $\sum u_n$ et $\displaystyle\sum_{n\geqslant n_o} u_n$ sont de même nature.
Soit $j\in\mathbb{N}$. Les séries $\sum u_n$ et $\sum u_{n+j}$ sont de même nature.

démo : les sommes partielles diffèrent d'une constante.

2. Propriétés élémentaires

Proposition 2 *Condition nécessaire de convergence*

Si la série $\sum u_n$ converge alors la suite (u_n) converge vers 0.

démo
Supposons que la série $\sum u_n$ converge vers $L\in\mathbb{K}$.
La suite $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ est donc convergente, et on a $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} S_N = L = \lim_{N\to+\infty} S_{N+1}$.
Or $\forall N\in\mathbb{N}^*,\ u_N = S_N - S_{N-1}$, donc, par opérations sur les limites finies, on trouve $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} u_N = 0$.

Attention, ce n'est pas une condition suffisante comme le prouve le cas de la série harmonique. Si cette condition n'est pas remplie, on dit que la série **diverge grossièrement**.

Proposition 3 *Somme et produit par un scalaire* :
Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries. Soit $\lambda\in\mathbb{K}^*$.

- Si les deux séries convergent alors $\sum(u_n+v_n)$ converge vers $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$.
  Si l'une série converge et l'autre diverge alors $\sum(u_n+v_n)$ diverge.
- Les séries $\sum u_n$ et $\sum \lambda u_n$ sont de même nature, si elles convergent alors $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\lambda u_n = \lambda\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

démo On regarde les sommes partielles de chacune des séries.

Remarque 2 :
Si les deux séries divergent alors tous les résultats sont possibles pour $\sum u_n + v_n$.
Exemple 1 : $u_n = n$ et $v_n = -n+1$, exemple 2 : $u_n = n$ et $v_n = -n-\dfrac{1}{2^n}$.

Proposition 4 *Linéarité de la somme des séries convergentes*

L'ensemble des séries convergentes, noté $\mathscr{E}$, est un $\mathbb{K}-$espace vectoriel.
L'application $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} u_n \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ est une forme linéaire sur $\mathscr{E}$, i.e. une application linéaire de $\mathscr{E}$ dans $\mathbb{K}$.

3. Séries géométriques

On appelle série géométrique toute série de la forme $\sum x^n$ avec $x\in\mathbb{K}$.
On sait déterminer la nature de ces séries et même en calculer la somme lorsqu'elles convergent.

Proposition 5 ☆

- Soit $x \in \mathbb{R}$, la série de terme général x^n est convergente si et seulement si $x \in]-1,1[$.
  Si $x \in]-1,1[$, alors $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \dfrac{1}{1-x}$.
- Soit $z \in \mathbb{C}$, la série $\sum z^n$ est convergente si et seulement si $|z| < 1$.
  Si $|z| < 1$ alors $\sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \dfrac{1}{1-z}$.

démo
➢ Commençons par le cas de $x \in \mathbb{R}$. Pour $x \neq 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum_{k=0}^{n} x^n = \dfrac{1-x^{n+1}}{1-x} = \dfrac{1}{1-x} - \dfrac{x^{n+1}}{1-x}$. Et on conclut en étudiant la suite $(\frac{x^{n+1}}{1-x})_{n\in\mathbb{N}}$. *La suite* $(x^{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ *converge si et seulement si* $x \in]-1,1]$.
Donc si $x \in]-1,1[$ (ici le cas $x = 1$ est exclu) alors (S_n) converge.
Dans le cas $x = 1$, alors la suite (S_n) est la suite $(n)_{n\in\mathbb{N}}$, donc la série diverge.
Si $x \in]-1,1[$, alors la série converge et la somme de la série est $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \dfrac{1}{1-x}$,
Si $x \geqslant 1$, la série tend vers $+\infty$ et enfin on vérifie que si $x \leqslant -1$, la série n'a pas de limite.
➢ Le raisonnement est le même pour $z \in \mathbb{C}$, en utilisant le fait que $(z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si et seulement si $|z| \in]0,1[$ ou $z = 1$.

Exemple 2
Déterminez si les séries suivantes convergent et le cas échéant calculez leur somme :

a. $\sum_{n\geqslant 0} \dfrac{2}{3^n}$. **b.** $\sum_{n\geqslant 1} (\dfrac{x}{2})^n$ avec $x \in \mathbb{R}$. **c.** $\sum_{n\geqslant 2} \dfrac{1}{2^{2n}}$. **d.** $\sum_{n\geqslant 0} \dfrac{1}{(2e^{i\pi/4})^n}$.

4. Séries télescopiques

Proposition 6

Soit (u_n) une suite à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
La série $\sum(u_{n+1} - u_n)$ est de même nature que la suite (u_n).

démo : En effet, pour $n \in \mathbb{N}$, $S_{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} u_{k+1} - u_k = u_n - u_0$.
Donc la série $\sum u_{n+1} - u_n$ converge vers S si et seulement si la suite (u_n) converge vers $S + u_0$.

Exemple 3
Étudier la convergence de $\sum_{n\geqslant 1} \ln(1 + \dfrac{1}{n})$.
Si elle converge, calculer sa somme, si elle diverge, donner un équivalent de sa somme partielle de rang N.

5. Cas des suites à valeurs dans $\mathbb{C}$

Soit (u_n) une suite complexe. On définit les suites partie réelle (v_n) et partie imaginaire (w_n) de (u_n) en posant, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \mathrm{Re}(u_n)$ et $w_n = \mathrm{Im}(u_n)$.

On dit que la suite (u_n) converge vers $l \in \mathbb{C}$ si $\lim_{n\to+\infty} |u_n - l| = 0$.

On montre l'équivalence (u_n) converge vers $l \in \mathbb{C}$ si et seulement si les suites réelles (v_n) et (w_n) convergent respectivement vers l_1 et l_2 dans $\mathbb{R}$. Dans ce cas, on a $l = l_1 + i l_2$.

Proposition 7

La série $\sum u_n$ converge si et seulement si les séries réelles $\sum v_n$ et $\sum w_n$ convergent toutes les deux.
Dans ce cas, $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} v_n + i \sum_{n=0}^{+\infty} w_n$.

Exemple 4 : Montrer que $\sum_{n\geqslant 0} \dfrac{\sin(n\frac{\pi}{4})}{2^n}$ converge et calculer sa somme.

II. SÉRIES À TERMES RÉELS POSITIFS

1. Théorèmes de comparaison

Dans tout ce paragraphe, les suites considérées sont **à termes réels positifs** : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant 0$ (on peut aussi supposer que cette propriété est vraie à partir d'un certain rang).

Proposition 8

Soit $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ une série à termes réels positifs.
➢ La suite $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ des sommes partielles est croissante.
➢ La série converge si et seulement si la suite (S_N) est majorée.

démo
➢ Soit $N \in \mathbb{N}$, on a $S_{N+1} - S_N = u_{N+1} \geqslant 0$, donc la suite (S_N) est croissante.
➢ D'après le théorème de **la limite monotone** pour les suites, toute suite croissante admet une limite : si la suite est majorée, cette limite est un réel, si la suite n'est pas majorée, cette limite est $+\infty$.
On obtient donc le résultat annoncé.

Proposition 9 ✰

Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes dans $\mathbb{R}_+$.
Si $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_n \leqslant v_n$ et $\sum v_n$ converge alors $\sum u_n$ converge. De plus, on a $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n \leqslant \sum\limits_{n=0}^{+\infty} v_n$.

démo
On travaille avec des séries à termes positifs, donc les suites des sommes partielles sont croissantes.
Notons pour $N \in \mathbb{N}$, $S_N = \sum\limits_{n=0}^{N} u_n$ et $T_N = \sum\limits_{n=0}^{N} v_n$.
On a $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_n \leqslant v_n$ donc $\forall N \in \mathbb{N}$, $S_N \leqslant T_N$ $(\star)$.
Or on suppose que la suite (T_N) converge : elle est donc majorée (suite convergente) par un réel M.
Ainsi on obtient que $\forall N \in \mathbb{N}$, $S_N \leqslant M$. La suite croissante (S_N) est majorée donc elle converge.
Maintenant que nous avons prouvé la convergence de (S_N), on peut passer à la limite dans l'inégalité $(\star)$:
$\lim\limits_{N\to+\infty} S_N \leqslant \lim\limits_{N\to+\infty} T_N$, c'est le résultat sur les sommes.

Remarque

- L'hypothèse avec des inégalités peut n'être vérifiée qu'à partir d'un certain rang : Si il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant n_0$, $0 \leqslant u_n \leqslant v_n$ et si $\sum v_n$ converge alors $\sum u_n$ converge et on a $\sum\limits_{n=n_0}^{+\infty} u_n \leqslant \sum\limits_{n=n_0}^{+\infty} v_n$.

  À partir de cette première comparaison par inégalité, on démontre le corollaire :

  Soient $\sum u_n$ et si $\sum v_n$ deux séries à termes dans $\mathbb{R}_+$.
  Si $u_n = O(v_n)$ et $\sum v_n$ converge alors $\sum u_n$ converge.

- Par contraposée, on obtient aussi, (en exploitant la croissance des séries) :

  Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes dans $\mathbb{R}_+$.
  Si $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_n \leqslant v_n$ et si $\sum u_n$ diverge alors $\sum v_n$ diverge.

démo

Proposition 10

Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes dans $\mathbb{R}$.
Si $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant v_n$ et si $u_n \sim v_n$ alors $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

démo On utilise le fait que $u_n \sim v_n$ implique $u_n = O(v_n)$ et $v_n = O(u_n)$.

Exemple 5 :

a. La série $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^2}$ converge : en effet $\forall n\geqslant 2,\ 0\leqslant \frac{1}{n^2}\leqslant \frac{1}{n(n-1)}$. Or la série $\sum_{n\geqslant 2}\frac{1}{n(n-1)}$ converge (cf exemple1).
Donc la série $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^2}$ converge également.

b. La série $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge puisque $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ 0\leqslant \frac{1}{n}\leqslant \frac{1}{\sqrt{n}}$. Et la série $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n}$ diverge.

c. $\sum \frac{n(2n-1)}{n^4+2n^3}$ converge car $\frac{n(2n-1)}{n^4+2n^3}\sim\frac{2}{n^2}$ et la série à termes positifs $\sum\frac{2}{n^2}$ converge.

d. $\sum \frac{n^2+(-1)^n}{n^3}$ diverge car $\frac{n^2+(-1)^n}{n^3}\sim\frac{1}{n}$ et la série à termes positifs $\sum\frac{1}{n}$ diverge.

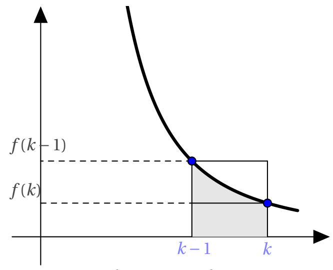
2. Comparaison à une intégrale

On considère une fonction f définie sur $[0,+\infty[$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, continue sur $\mathbb{R}$. On suppose de plus f monotone sur $[0,+\infty[$. On s'intéresse à la série $\sum f(n)$.
En général on aura aussi une hypothèse sur le signe de f. On montre, grâce aux propriétés de l'intégrale sur un segment, que

Si f est continue et décroissante sur $[0,+\infty[$ alors

- Pour tout $k\in\mathbb{N}^*$, $f(k)\leqslant \int_{k-1}^{k} f(t)\,dt\leqslant f(k-1)$.
- Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^{n} f(k)\leqslant \int_0^n f(t)\,dt\leqslant \sum_{k=0}^{n-1} f(k)$.

⚠ *Ce résultat ne doit pas être mémorisé, par contre il faut savoir le retrouver sur un exemple.*
démo



➢ Soit $k\in\mathbb{N}^*$, pour tout $t\in[k-1,k]$, on a $f(k)\leqslant f(t)\leqslant f(k-1)$ (décroissance de f)
Donc par croissance de l'intégrale sur un segment,
$\int_{k-1}^{k} f(k)\,dt\leqslant \int_{k-1}^{k} f(t)\,dt\leqslant \int_{k-1}^{k} f(k-1)\,dt$,
et ainsi on a bien $f(k)\leqslant \int_{k-1}^{k} f(t)\,dt\leqslant f(k-1)$.

➢ Soit $n\in\mathbb{N}^*$, on somme les encadrements précédents pour k entre 1 et n (*ceci peut varier suivant les exemples*) :
$\sum_{k=1}^{n} f(k)\leqslant \sum_{k=1}^{n}\int_{k-1}^{k} f(t)\,dt\leqslant \sum_{k=1}^{n} f(k-1)$.
En utilisant la relation de Chasles sur les intégrales, on a $\sum_{k=1}^{n}\int_{k-1}^{k} f(t)\,dt=\int_0^n f(t)\,dt$.
En posant $l=k-1$ dans la somme de droite, on a $\sum_{k=1}^{n} f(k-1)=\sum_{l=0}^{n-1} f(l)$.

Proposition 11

Si f est une fonction continue, positive, décroissante sur $[0,+\infty[$.
La série $\sum f(n)$ converge si et seulement si la suite $\left(\int_0^n f(t)\,dt\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

démo : On pose pour $N\in\mathbb{N}$, $S_N=\sum_{n=0}^{N} f(n)$ et $I_N=\int_0^N f(t)\,dt$.
On a d'après ce qui précède : pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^{n} f(k)\leqslant \int_0^n f(t)\,dt\leqslant \sum_{k=0}^{n-1} f(k)$, donc $\boxed{S_n-S_0\leqslant I_n\leqslant S_{n-1}.}$
De plus, f est supposée positive, donc la suite $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ et la suite $(I_N)_{N\in\mathbb{N}}$ sont toutes les deux croissantes. On utilise le **thm de la limite monotone**, comme en prop. 8.
Supposons que la série converge, on a alors (S_N) convergente donc majorée, par un réel L.
Ainsi l'encadrement nous donne : $\forall n\in\mathbb{N},\ I_n\leqslant S_{n-1}\leqslant L$. La suite (I_n) est majorée donc elle converge.
Réciproquement, si la suite des intégrales (I_n) converge alors elle est majorée par un réel M.
Et on a $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ S_n-S_0\leqslant I_n\leqslant M$ donc $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ S_n\leqslant M+S_0$. La suite (S_n) est majorée donc convergente.

3. Séries de Riemann

Proposition 12 ☆

> Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. La série $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ est convergente si et seulement si $\alpha > 1$.

démo : Les cas $\alpha = 1$ et $\alpha = 2$ ont été vus :
$\sum \frac{1}{n}$ diverge (*voir l'exemple 1*) et $\sum \frac{1}{n^2}$ converge (*voir l'exemple 5*).

- Si $\alpha > 2$, on a $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leqslant \frac{1}{n^\alpha} \leqslant \frac{1}{n^2}$, donc par comparaison de séries à termes positifs, la série $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge.

- Si $\alpha \leqslant 1$, alors $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leqslant \frac{1}{n} \leqslant \frac{1}{n^\alpha}$, et à nouveau par comparaison de séries à termes positifs, la série diverge.

- Il reste le cas $\alpha \in]1,2[$ à traiter. Celui-ci s'obtient par comparaison à une intégrale :
on considère $f : t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$, elle est continue, décroissante et positive sur $\mathbb{R}_+^*$. Nous allons refaire le raisonnement de la propriété précédente.
Soit $n \geqslant 2$. Pour tout $t \in [n-1, n]$, $\frac{1}{n^\alpha} \leqslant \frac{1}{t^\alpha} \leqslant \frac{1}{(n-1)^\alpha}$ car la fonction $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ est décroissante.

  ➢ En intégrant sur le segment $[n-1, n]$ (et en ne gardant que l'inégalité de gauche),
on obtient $0 \leqslant \frac{1}{n^\alpha} \leqslant \int_{n-1}^{n} \frac{1}{t^\alpha}\, dt$.
Soit $N \geqslant 2$, on peut faire la somme de ces inégalités entre 2 et N :

$$\sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n^\alpha} \leqslant \sum_{n=2}^{N} \int_{n-1}^{n} \frac{1}{t^\alpha}\, dt = \int_{1}^{N} \frac{1}{t^\alpha}\, dt\,.$$

  ➢ Calculons $\int_1^N \frac{1}{t^\alpha}\, dt = \left[\frac{-1}{\alpha-1}\frac{1}{t^{\alpha-1}}\right]_1^N = \frac{-1}{\alpha-1}\left(\frac{1}{N^{\alpha-1}} - 1\right) = \frac{1}{\alpha-1} - \frac{1}{(\alpha-1)N^{\alpha-1}}$.

  ➢ Donc $\sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n^\alpha} \leqslant \frac{1}{\alpha-1} - \frac{1}{(\alpha-1)N^{\alpha-1}}$. Or $\frac{1}{(\alpha-1)N^{\alpha-1}} \geqslant 0$ car $\alpha > 1$.

  Ce qui permet de conclure que la suite des sommes partielles est majorée $\forall N \geqslant 2$, $\sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n^\alpha} \leqslant \frac{1}{\alpha-1}$.

  Ainsi la suite <u>croissante</u> (*pourquoi ?*) $\left(\sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n^\alpha}\right)_{N\in\mathbb{N}}$ est majorée donc converge.

  > La série $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge donc si $\alpha > 1$

> *Application à la convergence des séries à termes positifs.*

Comparaison à une série de Riemann

> Soit $\sum u_n$ une série à termes réels positifs.
> - Si il existe $\alpha > 1$ tel que $u_n = O(\frac{1}{n^\alpha})$ alors $\sum u_n$ converge.
> - Si il existe $\alpha \leqslant 1$ tel que $\frac{1}{n^\alpha} \leqslant u_n$ à partir d'un certain rang, ou tel que $u_n \sim \frac{1}{n^\alpha}$, alors la série $\sum u_n$ diverge.

Remarque 3 :
Pour étudier la convergence d'une série à termes positifs $\sum u_n$, on pourra

- *chercher un $\alpha > 1$ tel que $\lim\limits_{n\to+\infty} n^\alpha u_n = 0$ et en déduire que $u_n = o(\frac{1}{n^\alpha})$*

- *ou (si l'on pense que la série diverge), chercher un $\alpha \leqslant 1$ tel que $\lim\limits_{n\to+\infty} n^\alpha u_n = +\infty$, ainsi à partir d'un certain rang, on a $u_n \geqslant \frac{1}{n^\alpha}$.*

Exemple 6

a. Étudier la convergence de $\sum u_n$ avec $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}} \sin \dfrac{\pi}{n}$.
On pourra utiliser $\sin x \underset{0}{\sim} x$ pour trouver un équivalent de u_n.

b. Étudier la convergence de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(\ln n)^2}{\sqrt{n}}$.

c. Étudier la convergence de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{\ln n}{n^{5/4}}$.

4. Développement décimal d'un réel

On désignera par $E(x)$ la partie entière d'un réel x.

Soit $x \in \mathbb{R}$, on définit

- une approximation décimale (par défaut) de x en posant $\forall n \in \mathbb{N},\ r_n = \dfrac{E(10^n x)}{10^n}$,
  et une approximation décimale (par excès) de x en posant $\forall x \in \mathbb{N},\ s_n = r_n + \dfrac{1}{10^n}$.
  Les deux suites (r_n) et (s_n) sont des suites adjacentes qui convergent vers x.

- On définit la suite (a_n) en posant $a_0 = r_0 = E(x)$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_n = 10^n(r_n - r_{n-1})$.
  Si x est positif, alors (a_n) est la suite des décimales de x. La série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{a_n}{10^n}$ converge et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{10^n} = x$. On dit que cette écriture est un développement décimal illimité de x.
- On peut se ramener à un réel x dans $]0,1[$, en écartant les entiers et en posant pour $x \in \mathbb{R}$, $x' = x - E(x)$.

Proposition 13 *développement décimal illimité propre*

Tout réel x de $]0,1[$ s'écrit de manière unique sous la forme

$$x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{10^n}$$

où $a_0 \in \mathbb{N}$ et $(a_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite d'entiers naturels de $[\![0,9]\!]$ qui n'est pas stationnaire égale à 9.

On appelle cette écriture de x le **développement décimal illimité propre** de x.

Définition 2 : *Développement décimal périodique*
On dit que le développement décimal $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{10^n}$ d'un réel positif x de $]0,1[$ est périodique à partir d'un certain rang si il existe un rang $p \in \mathbb{N}^*$ et un entier $q \in \mathbb{N}^*$ tels que $\forall n \geqslant p+1,\ a_n = a_{n+q}$.

Proposition 14

Un réel strictement positif x de $]0,1[$ est rationnel si et seulement si son développement illimité propre est périodique à partir d'un certain rang.

III. ABSOLUE CONVERGENCE

1. Définition

Définition 3 : ✰ Soit (u_n) une suite réelle ou complexe.
On dit que la série $\sum u_n$ est **absolument convergente** si la série $\sum |u_n|$ converge.

⚠Ici, la notation $|u_n|$ se comprend comme une valeur absolue si (u_n) est une suite réelle et comme un module si c'est une suite complexe.

Remarque 4 :
On dit que la série $\sum u_n$ est semi-convergente si elle est convergente mais pas absolument convergente.

Exemple 7 :

- La série $\sum \dfrac{(-1)^{n+1}}{2^n}$ est absolument convergente.
- La série $\sum \dfrac{(-1)^n}{n}$ est semi-convergente (*voir Td pour la preuve de la convergence*).
- La série $\sum \dfrac{\sin n}{2^n}$ est absolument convergente.

Proposition 15 ✰

Soit $\sum u_n$ une série à termes réels ou complexes.
Si $\sum u_n$ est absolument convergente alors $\sum u_n$ est convergente, et $\left|\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right| \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$.

démo ➢ Commençons par le cas des séries à termes réels.
On suppose que la série $\sum u_n$ est absolument convergente.
On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = |u_n|$ et $w_n = |u_n| - u_n$.
On a $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = v_n - w_n$ et la série $\sum w_n$ est à termes réels positifs.
Or $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant w_n \leqslant 2|u_n|$ et comme la série $\sum |u_n|$ converge, par comparaison (de séries à termes positifs), la série $\sum w_n$ converge également. On sait donc que les séries $\sum v_n$ et $\sum w_n$ convergent toutes les deux.
On en déduit que $\sum u_n$ converge, par somme de séries convergentes.
➢ Considérons maintenant une série $\sum u_n$ à termes complexes. On la suppose absolument convergente. On note, pour $n \in \mathbb{N}$, $x_n = \mathrm{Re}(u_n)$ et $y_n = \mathrm{Im}(u_n)$. Pour montrer que $\sum u_n$ est convergente, il est équivalent de montrer que les deux séries $\sum x_n$ et $\sum y_n$ sont convergentes.
On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant |x_n| \leqslant |u_n|$ (comparaison de la partie réelle et du module d'un nombre complexe) et par comparaison de séries à termes positifs, on conclut que $\sum |x_n|$ est convergente. Or ceci signifie que $\sum x_n$ est absolument convergente, et c'est une série à termes réels, donc on sait qu'elle est convergente grâce au cas réel que l'on vient de traiter.
On travaille de même avec $\sum y_n$.
➢ Il reste à prouver l'inégalité sur les sommes lorsque la série converge absolument.
Or pour tout $N \in \mathbb{N}$, $\left|\sum_{n=0}^{N} u_n\right| \leqslant \sum_{n=0}^{N} |u_n| \quad (\star)$, (on démontre ceci par récurrence à partir de l'inégalité triangulaire, valable dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).
Puisque l'on a montré la convergence de la série $\sum u_n$, on sait que la suite de terme général $S_N = \sum_{n=0}^{N} u_n$ admet une limite finie. Donc la suite $(|S_N|)$ admet également une limite finie.
Enfin, $\sum |u_n|$ converge par hypothèse, donc la suite de ses sommes partielles admet une limite.
On peut donc passer à la limite dans l'inégalité $(\star)$, ce qui donne le résultat attendu.

Proposition 16 *Théorème de comparaison*

Soit $\sum u_n$ une série à termes réels ou complexes.
Si v_n est le terme général positif d'une série convergente et si $u_n = O(v_n)$ alors $\sum u_n$ converge absolument.

2. Règle de D'Alembert

Proposition 17 ✰

Soit (u_n) une suite à termes réels ou complexes, telle que $u_n \neq 0$ à partir d'un certain rang.
On suppose que $\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right|$ existe et est finie. On note L cette limite, qui est dans $[0,+\infty[$.
Si $L<1$ alors la série $\sum u_n$ est absolument convergente, si $L>1$ alors la série diverge.

démo On travaille avec la série $\sum\limits_{n\geqslant n_0}|u_n|$, qui est à termes réels strictement positifs. On pose $v_n=|u_n|$, et on suppose que $n_0=0$ sans perte de généralité.

➢ Premier cas $L<1$

➞ Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{v_{n+1}}{v_n}=L<1$, il existe $\delta\in]L,1[$ tel que, à partir d'un certain rang $N\in\mathbb{N}$, $\forall n\geqslant N$, $\dfrac{v_{n+1}}{v_n}\leqslant\delta$. (prendre $\varepsilon=\dfrac{1-L}{2}$ dans la définition de la limite). Or $\forall n\geqslant N,\ v_n>0$ donc $\forall n\geqslant N,\ v_{n+1}\leqslant\delta v_n$.

➞ Par récurrence, on montre que $\forall p\geqslant N,\ v_p\leqslant\delta^{p-N}v_N$. On en déduit que $v_p=O(\delta^p)$. Or la série $\sum\limits_{p\geqslant N}\delta^p$ converge car c'est une série géométrique avec $\delta\in]0,1[$. Par comparaison de séries à termes positifs, on conclut que la série $\sum v_p$ converge.

➢ Deuxième cas $L>1$: L'hypothèse $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{v_{n+1}}{v_n}=L>1$ permet de montrer qu'il existe $\delta>1$ et $N\in\mathbb{N}$ tels que $\forall n\geqslant N,\ v_{n+1}\geqslant\delta v_n$. Par récurrence, on montre que $0\leqslant\delta^p\underbrace{\dfrac{v_N}{\delta^N}}_{A=constante}\leqslant v_p$ et on conclut que (v_p) tend vers $+\infty$, comme $(\delta^p)_{p\in\mathbb{N}}$ car $\delta>1$. Donc la série $\sum v_p$ diverge grossièrement.

Remarque 5 :

Dans le cas $L=1$, on ne peut pas conclure car tous les cas peuvent se présenter.
Par exemple, avec $u_n=\dfrac{1}{n}$, avec $u_n=n$, $u_n=\dfrac{1}{n^2}$, on a dans tous ces cas $\lim\limits_{n\to+\infty}|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}|=1$ et pourtant les séries $\sum u_n$ ont des comportements différents.

3. Produit de Cauchy

Proposition 18 ✰(énoncé)

Soient (a_n) et (b_n) deux suites de réels ou de complexes.
Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on pose $c_n=\sum\limits_{k=0}^{n}a_kb_{n-k}$.
Si $\sum a_n$ et $\sum b_n$ sont absolument convergentes, alors la série $\sum c_n$ est absolument convergente et on a $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}c_n=\left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_n\right)\left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty}b_n\right)$.

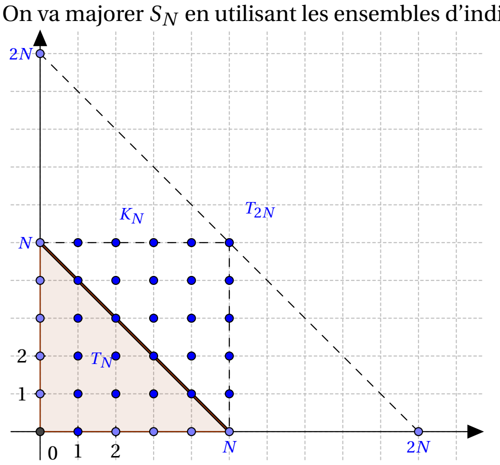
démo

➢ On traite d'abord le cas des suites réelles positives.

On pose, pour $N\in\mathbb{N}$, $S_N=\sum\limits_{n=0}^{N}c_n$ avec c_n défini dans l'énoncé. On remarque que, pour tout n, $c_n=\sum\limits_{i+j=n}a_ib_j$.

Pour $N\in\mathbb{N}$, on définit les ensembles d'indices $T_N=\{(p,q)\in[\![0,N]\!]\ /\ p+q\leqslant N\}$ et $K_N=[\![0,N]\!]^2$.

On va majorer S_N en utilisant les ensembles d'indices.



➞ On travaille sur les sommes : $S_N = \sum_{n=0}^{N} \sum_{i+j=n} a_i b_j = \sum_{(i,j)\in T_N} a_i b_j$.

On a $T_N \subset K_N$, ce qui permet de montrer que $\forall N \in \mathbb{N}$, $\sum_{n=0}^{N} c_n = \sum_{(i,j)\in T_N} a_i b_j \leqslant \sum_{(i,j)\in K_N} a_i b_j$, car les termes ajoutés sont positifs.

De plus, $\sum_{(i,j)\in K_N} a_i b_j = \sum_{i=0}^{N} a_i \sum_{j=0}^{N} b_j$.

On a donc pour tout $N \in \mathbb{N}$, $S_N \leqslant \sum_{i=0}^{N} a_i \sum_{j=0}^{N} b_j$ et le membre de droite est majoré car c'est le produit des termes de deux suites convergentes, donc bornées.

On conclut que la suite $\left(\sum_{n=0}^{N} c_n\right)$ est croissante (série à termes positifs) et majorée donc convergente.

➞ On montre alors l'égalité des sommes.

On remarque maintenant que, pour tout $N \in \mathbb{N}$, $T_N \subset K_N \subset T_{2N}$, ce qui donne l'encadrement des sommes : $S_N \leqslant \sum_{(i,j)\in K_N} a_i b_j \leqslant S_{2N}$.

Puisque toutes les suites présentes admettent une limite, on passe à la limite dans l'inégalité pour obtenir

$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \sum_{n=0}^{+\infty} b_n \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} c_n$, et déduire l'égalité.

➢ Revenons au cas général.

➞ Montrons d'abord que la série $\sum c_n$ est ACV.

Soit $N \in \mathbb{N}$, on a $\sum_{n=0}^{N} |c_n| \leqslant \sum_{n=0}^{N} \sum_{i+j=n} |a_i|\,|b_j|$ par inégalité triangulaire.

On pose $S'_N = \sum_{n=0}^{N} \sum_{i+j=n} |a_i|\,|b_j| = \sum_{(i,j)\in T_N} |a_i|\,|b_j|$ et $\gamma_n = \sum_{i+j=n} |a_i|\,|b_j|$.

D'après le cas des séries à termes positifs, comme $\sum |a_n|$ et $\sum |b_n|$ convergent, on déduit que $\sum \gamma_n$ converge. Donc la suite (S'_N) converge, elle est donc majorée et on conclut que la série $\sum |c_n|$ converge. Par conséquent, la série $\sum c_n$ converge.

➞ Montrons alors l'égalité des sommes :

$$\begin{aligned}
\left|(\sum_{i=0}^{N} a_i)(\sum_{j=0}^{N} b_j) - \sum_{n=0}^{N} c_n\right| &= \left|\sum_{(i,j)\in K_N \setminus T_N} a_i\, b_j\right| \\
&\leqslant \sum_{(i,j)\in K_N \setminus T_N} \left|a_i\, b_j\right| \text{ par inégalité triangulaire} \\
&= \sum_{i=0}^{N} |a_i| \sum_{j=0}^{N} |b_j| - \sum_{n=0}^{N} \gamma_n
\end{aligned}$$

Or le dernier terme tend vers 0 quand N tend vers $+\infty$, donc le terme de gauche aussi.

Auguste-Louis Cauchy (1789-1857)

Edmund Landau (1877-1938)

Bernhard Riemann (1826-1866)