On considère connues les notions de $\mathbb{K}-$espace vectoriel (avec $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), de combinaison linéaire de vecteurs, de sous-espace vectoriel, de famille de vecteurs, d'application linéaire.

I. Familles d'un $\mathbb{K}-$espace vectoriel

1. Familles finies

Définition 1 : On considère une famille finie $(u_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$.

- $(u_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est **libre** si $\forall(\lambda_1,\dots,\lambda_n)\in\mathbb{K}^n$, $\left(\sum_{i=0}^{n}\lambda_i u_i=0_E \Longrightarrow \lambda_1=\dots=\lambda_n=0\right)$.
- $(u_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est **liée** si elle n'est pas libre.
- $(u_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est **génératrice de** E si tout vecteur de E peut s'écrire comme une C. L. des (u_i)
- Elle est une **base de** E si elle est à la fois libre et génératrice de E.

Autre formulations :

- *Famille libre : il n'existe pas de C.L. nulle des u_i autre que celle formée avec les coefficients tous nuls. On dit que les vecteurs sont linéairement indépendants.*
- *Famille liée : l'un des u_i s'écrit comme une C. L. des autres vecteurs de la famille. On dit que les vecteurs sont linéairement dépendants.*

Sous-espace engendré par une famille ✰

Définition 2 : Soit $(u_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ une famille finie de vecteurs de E.
On appelle **sous-espace vectoriel engendré par les** u_i l'ensemble noté $\mathrm{Vect}(u_1,\dots,u_n)$ des vecteurs formés par les combinaisons linéaires des u_i.

Matrices ✰

Si E est un espace vectoriel de dimension finie, muni d'une base $\mathscr{B}$.

La matrice d'une famille de vecteurs dans une base est notée $Mat_{\mathscr{B}}(u_1,\dots,u_p)$: on place en colonne les coordonnées des vecteurs u_j dans la base $\mathscr{B}$ choisie. Si la base contient n vecteurs et la famille $(u_1,\dots,u_p)$ p vecteurs, on obtient une matrice de $M_{n,p}(\mathbb{K})$.

2. Familles infinies

Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel. On considère $(u_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs de E (I désigne un ensemble quelconque d'indices).

Définition 3 : On dit que le vecteur v de E est une **combinaison linéaire** de la famille $(u_i)_{i\in I}$ si il existe une partie finie J de I et une famille finie $(\lambda_j)_{j\in J}$ de scalaires tels que $v=\sum_{j\in J}\lambda_j u_j$.

Remarque 1 : une CL est toujours une somme finie.

Définition 4 : ✰

- La famille $(u_i)_{i\in I}$ est **libre** si toute sous-famille finie de $(u_i)_{i\in I}$ est libre dans E,
- La famille $(u_i)_{i\in I}$ est **liée** si elle n'est pas libre.
- La famille $(u_i)_{i\in I}$ est **génératrice de** E si tout vecteur de E peut s'écrire comme CL de $(u_i)_{i\in I}$.
- Une **base de** E est une famille libre et génératrice de E.

Méthode : Comment montrer qu'une famille (finie ou infinie) est libre ?

- *Pour montrer qu'une famille infinie est libre, on doit montrer que toute sous-famille finie est libre.*
- *Pour montrer qu'une famille infinie est liée, on doit montrer qu'il existe une sous-famille finie liée.*
- *Une famille infinie est libre si, lorsque l'on prend une sous-famille finie quelconque et que l'on ajoute un élément quelconque de la famille, ce dernier ne peut s'écrire comme CL des premiers.*

Proposition 1

Toute famille de polynômes non nuls échelonnée en degré est libre.
Toute famille $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ telle que $\deg(P_k) = k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ est une base de $\mathbb{K}[X]$.

démo

II. Dimension d'un $\mathbb{K}-$espace vectoriel

Définition 5 : On dit qu'un espace vectoriel E est de **dimension finie** s'il admet une famille génératrice finie.

On prouve ensuite le théorème de la base incomplète :

Théorème 1
Soit une famille $\mathscr{G}$ génératrice de E et finie, soit $\mathscr{L}$ une famille libre de E.
On peut compléter la famille $\mathscr{L}$ en une base de E en lui adjoignant des vecteurs de $\mathscr{G}$.

On en déduit les propriétés suivantes, pour un espace E de dimension finie,

- De toute famille génératrice finie de E, on peut extraire une base de E.
- On peut compléter toute famille libre de E en une base de E.

On montre ensuite grâce au théorème suivant, que toutes les bases d'une espace E de dimension finie ont le même nombre de vecteurs : c'est cet entier que l'on appelle la **dimension de** E.
L'unique espace de dimension 0 est l'espace $\{0\}$.

Théorème 2
Dans un espace vectoriel engendré par une famille de n vecteurs, toute famille de $n+1$ vecteurs est liée.

Par conséquent, dans un espace E de dimension n,
➢ Une famille libre de E contient au plus n vecteurs.
➢ Une famille génératrice de E contient au moins n vecteurs.

Proposition 2 ✰

Soit E un espace de dimension $n \in \mathbb{N}^*$. Soit une famille $(u_1,\dots,u_n)$ de <u>n vecteurs</u> de E.
Si $(u_1,\dots,u_n)$ est libre alors c'est une base de E.
Si $(u_1,\dots,u_n)$ est génératrice de E alors c'est une base de E.

Pour les sous-espaces d'un espace de dimension finie, on a le résultat suivant :
Proposition 3

Soit E de dimension finie.
➢ Tout sous-espace F de E est de dimension finie avec $\dim F \leqslant \dim E$.
➢ Si F est un sous-espace de E et si $\dim F = \dim E$ alors $F = E$.

Méthode : Comment montre-t-on qu'une famille de vecteurs est une base de E ?

- On montre qu'elle est libre et génératrice de E.
- Si E est de dimension n, plusieurs possibilités :
  ➢ on peut montrer qu'elle est libre et qu'elle contient n vecteurs.
  ➢ on peut montrer qu'elle est génératrice de E et qu'elle contient n vecteurs.
  ➢ on peut considérer la matrice de la famille de vecteurs dans une base et on montre que cette matrice est de rang n.

Méthode : Comment trouver une base d'un sous-espace vectoriel d'un espace E ?

III. Somme de sous-espaces vectoriels

1. Somme directe de 2 sous-espaces et supplémentaires

Définition 6 : Soient deux sous-espaces F et G de E.
- On dit que la somme $F+G$ est **directe** si tout vecteur x de $F+G$ s'écrit de manière **unique** comme la somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G.
- On dit que F et G **supplémentaires dans** E si tout vecteur x de E s'écrit de manière unique comme la somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G.

Proposition 4

Soient deux sous-espaces F et G de E.
- F et G sont en somme directe si et seulement si $F\cap G=\{0\}$.
- F et G de E sont supplémentaires dans E si et seulement si $F\cap G=\{0\}$ et $E=F+G$.

En dimension finie

On prouve que tout sous-espace F de E admet un supplémentaire G (grâce au théorème de la base incomplète).
De plus, si F et G sont supplémentaires dans E alors $\dim F+\dim G=\dim E$.
On prouve ensuite la **formule de Grassmann** :
$\dim(F+G)=\dim F+\dim G-\dim(F\cap G)$.

Hermann Grassmann (1809-1877)

On en déduit la propriété suivante :
Proposition 5 *Caractérisation des supplémentaires en dimension finie* ✰

Soient F et G deux sous-ev de E, de dimension finie,
F et G sont supplémentaires si et seulement si $\dim F+\dim G=\dim E$ et $E=F+G$,
si et seulement si $\dim F+\dim G=\dim E$ et $F\cap G=\{0\}$.

Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension finie. On note dans la suite $\{\mathscr{B}_1,\mathscr{B}_2\}$ la concaténation de deux familles de vecteurs $\mathscr{B}_1=(u_1,\dots,u_n)$ et $\mathscr{B}_2=(v_1,\dots,v_p)$. C'est-à-dire que $\{\mathscr{B}_1,\mathscr{B}_2\}$ désigne la famille $(u_1,\dots,u_n,v_1,\dots,v_p)$.

Proposition 6

Soit F_1 un sous-espace vectoriel de E Soit $\mathscr{B}_1$ une base de F_1.

a. Si $\mathscr{B}_2$ est une famille de vecteurs de E telle que $\{\mathscr{B}_1,\mathscr{B}_2\}$ forme une base de E, alors $F_2=\text{Vect}(\mathscr{B}_2)$ est un supplémentaire de F_1 dans E.

b. Si F_2 est un supplémentaire de F_1 dans E et si $\mathscr{B}_2$ est une base de F_2 alors $\{\mathscr{B}_1,\mathscr{B}_2\}$ forme une base de E.

On développe la notion de **base adaptée à des supplémentaires** : Soient F et G sont supplémentaires dans E.
➢ On dit que $\mathscr{B}=(e_1,\dots,e_n)$ est adaptée à cette décomposition si les premiers vecteurs $(e_1,\dots,e_p)$ forment une base de F et les derniers vecteurs $(e_{p+1},\dots,e_n)$ forment une base de G.
➢ Réciproquement, en prenant la réunion d'une base de F et d'une base de G, on obtient une base de E.

Méthode : Comment montrer que deux sous-espaces F et G sont supplémentaires dans E ?
- On montre que $F+G=E$ et $F\cap G=\{0\}$.
- Si E est de dimension finie, plusieurs possibilités :
  ➢ on peut montrer que $F+G=E$ et $\dim F+\dim G=\dim E$,
  ➢ on peut montrer que $F\cap G=\{0\}$ et $\dim F+\dim G=\dim E$,
  ➢ on peut montrer que la réunion d'une base de F et d'une base de G forme une base de E.
- On peut raisonner par analyse-synthèse.

2. Somme directe de plusieurs sous-espaces

Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel. On généralise dans ce paragraphe la notion de somme et de somme directe à plus de deux sous-espaces.

Définition 7 : Soient $F_1,\dots,F_p$ des sous-espaces vectoriels de E.
On note $F_1+\cdots+F_p=\{u\in E\ /\ \exists u_1\in F_1,\ \dots,\ \exists u_p\in F_p,\ u=u_1+\cdots+u_p\}$.
C'est un sous-espace vectoriel de E, appelé **somme des** F_i.

Définition 8 : ✰ Soient $F_1,\dots,F_p$ des sous-espaces vectoriels de E.
On dit que les F_i sont **en somme directe** si tout vecteur de $F_1+\cdots+F_p$ s'écrit de manière unique comme une somme d'un vecteur de F_1, ..., d'un vecteur de F_p.
On note alors $F_1\bigoplus\cdots\bigoplus F_p$ pour désigner la somme directe des F_i.

Exemple 1
Dans $\mathbb{K}^n$, muni de sa base canonique $(e_1,\dots,e_n)$, on pose $F_i=\mathrm{Vect}(e_i)$.
La somme $F_1+\cdots+F_n$ est directe, et de plus elle est égale à E. On note donc $E=F_1\bigoplus\cdots\bigoplus F_n$.

Proposition 7 ✰ *Caractérisation par la décomposition du vecteur nul*

Soient $F_1,\dots,F_p$ des sous-espaces vectoriels de E. La somme des F_i est directe si et seulement si

$$\forall (u_1,\dots,u_p)\in E^p,\qquad \left.\begin{array}{l} u_1\in F_1,\ u_2\in F_2,\dots u_p\in F_p\\ u_1+u_2+\cdots+u_p=0\end{array}\right\}\Longrightarrow u_1=u_2=\cdots=u_p=0\,.$$

démo
➢ Si la somme est directe, le vecteur 0_E est dans $F_1+\cdots+F_p$ et se décompose de manière unique en $0_E=0_E+\cdots+0_E$. La condition sur les vecteurs u_i implique par l'unicité que tous les u_i sont nuls.
➢ On suppose l'hypothèse (unicité de la décomposition de 0_E) vérifiée. On doit montrer que la somme des F_i est directe.
Prenons $x\in F_1+\cdots+F_p$ et écrivons le $x=u_1+\cdots+u_p=v_1+\cdots+v_p$ avec $\forall i\in[\![1,p]\!],\ u_i,v_i\in F_i$.
On a alors $\underbrace{u_1-v_1}_{\in F_1}+\cdots+\underbrace{u_p-v_p}_{\in F_p}=0_E$, et par l'hypothèse, on conclut que $\forall i\in[\![1,p]\!],\ u_i-v_i=0_E$. L'écriture en somme d'éléments des F_i est donc unique : la somme est directe.

Utilisation des bases en dimension finie
Proposition 8 *Base adaptée à une décomposition en somme directe*

Soient F_1,...,F_p des sous-espaces de E, $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension finie.
Soient $\mathscr{B}_1$ une base de F_1, ..., $\mathscr{B}_p$ une base de F_p. On note $F=F_1+\cdots+F_p$.
La somme $F_1+\cdots+F_p$ est directe si et seulement si $\{\mathscr{B}_1,\dots,\mathscr{B}_p\}$ est une famille libre.

démo : On note $F=F_1+\cdots+F_p$ la somme des sous-espaces. Le résultat peut aussi s'énoncer $F=F_1+\cdots+F_p$ si et seulement si $\{\mathscr{B}_1,\dots,\mathscr{B}_p\}$ est une base de F.
➢ Supposons que la somme est directe. Montrons que $\mathscr{B}$ est une famille libre.
On note $\mathscr{B}_1=(v_i)_{1\leqslant i\leqslant r}$, ..., $\mathscr{B}_p=(w_i)_{1\leqslant i\leqslant s}$ (on pourrait noter $\mathscr{B}_k=(v_{ki})_{1\leqslant i\leqslant r_k}$).
On considère une CL nulle des vecteurs de $\mathscr{B}$: $\underbrace{\lambda_1 v_1+\cdots+\lambda_r v_r}_{\in F_1}+\ldots\cdots+\underbrace{\mu_1 w_1+\cdots+\mu_q w_q}_{\in F_p}=0$.
D'après la proposition précédente, chacun des vecteurs soulignés est nul (unicité de la décomposition du vecteur nul) : $\lambda_1 v_1+\cdots+\lambda_r v_r=0$, ..., $\mu_1 w_1+\cdots+\mu_q w_q=0$.
Et comme les familles $\mathscr{B}_1$, ..., $\mathscr{B}_p$ sont libres, tous les coefficients sont nuls. La famille $\mathscr{B}$ est donc libre.
➢ Réciproquement, supposons que $\mathscr{B}$ est une famille libre. Prenons $u_1\in F_1,\ u_2\in F_2,\dots u_p\in F_p$ tels que $u_1+u_2+\cdots+u_p=0$. Comme $u_1\in F_1$, il s'écrit comme CL des vecteurs de $\mathscr{B}_1$: $u_1=\lambda_1 v_1+\cdots+\lambda_p v_p$, de même pour tous les autres u_i, ils s'écrivent chacun comme CL des vecteurs de $\mathscr{B}_i$. Donc $u_1+u_2+\cdots+u_p=0$ fournit une CL nulle des vecteurs de $\mathscr{B}$: cette famille est libre, donc tous les coefficients de la CL sont nuls. Cela implique que $u_1=0$ et de même $u_2=\cdots=u_p=0$. On a montré que la somme des F_i est directe.

Remarque 2 :
Si $E=F_1\oplus\cdots\oplus F_p$, on dira que "E est la somme directe des F_i".
Cela implique que "la somme des F_i est directe" mais cette dernière locution est moins forte (car elle ne dit pas que tout élément de E sécrit comme somme de vecteurs des F_i).

Exemple 2

Dans $E=\mathbb{R}^4$, on considère quatre vecteurs a_1, a_2, a_3, a_4. On note $F_1=\text{Vect}(a_1)$, $F_2=\text{Vect}(a_2,a_3)$, $F_3=\text{Vect}(a_4)$ et $F_4=\text{Vect}(a_2,a_4)$.
➢ La somme F_1+F_3 est directe si et seulement si (a_1,a_4) est une famille libre.
➢ La somme $F_1+F_2+F_3$ est directe si et seulement si (a_1,a_2,a_3,a_4) est une une famille libre. Dans ce cas, c'est une base de E, et donc $E=F_1\oplus F_2\oplus F_3$.
➢ La somme F_2+F_4 n'est pas directe car la famille (a_2,a_3,a_2,a_4) n'est pas libre.

Proposition 9 *Somme directe en dimension finie*

Soit E un $\mathbb{K}-$ espace vectoriel de dimension finie. Soient F_1, ...,F_p des sous-espaces vectoriels de E.
- Si la somme des F_i est directe alors $\dim(F_1\bigoplus\cdots\bigoplus F_p)=\dim F_1+\cdots+\dim F_p$.
- $E=F_1\bigoplus\cdots\bigoplus F_p$ si et seulement si $E=F_1+\cdots+F_p$ et $\dim E=\dim F_1+\cdots+\dim F_p$.

démo
• On suppose que la somme est directe, donc $\mathscr{B}=\{\mathscr{B}_1,\ldots,\mathscr{B}_p\}$ est une base de $F_1+\cdots+F_p$. Comme $\dim F_1+\cdots+\dim F_p$ est le nombre de vecteurs de $\mathscr{B}$, on conclut donc à l'égalité des dimensions proposée.
• L'implication directe découle de ce qui précède.
Supposons que $E=F_1+\cdots+F_p$ et $\dim E=\dim F_1+\cdots+\dim F_p$.
La famille $\mathscr{B}=\{\mathscr{B}_1,\ldots,\mathscr{B}_p\}$ est génératrice de E et elle comporte un nombre de vecteurs égal à la dimension de E. C'est donc une base de E : elle est libre !
Donc la somme des F_i est directe et elle est égale à E.

Remarque 3 :

➢ La caractérisation de somme directe par intersection est plus compliquée ici. Voici le résultat : Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel. Soient $E_1,\ldots,E_p$ des sous-espaces de E.
$E_1,\ldots,E_p$ sont en somme directe si et seulement si

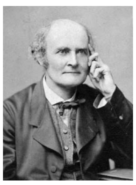
$$E_1\cap E_2=\{0\},\quad (E_1+E_2)\cap E_3=\{0\},\quad (E_1+E_2+E_3)\cap E_4=\{0\},\ldots\quad (E_1+E_2+\cdots+E_{p-1})\cap E_p=\{0\}\ .$$

➢ Plaçons-nous dans $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique (e_1,e_2,e_3), et posons $F_1=\text{Vect}(e_1)$, $F_2=\text{Vect}(e_2)$ et $F_3=\text{Vect}(e_1+e_2)$.
Vous pouvez vérifier que $F_1\cap F_2=\{0\}$, $F_1\cap F_3=\{0\}$, $F_2\cap F_3=\{0\}$. Pourtant, les espaces F_1, F_2 et F_3 ne sont pas en somme directe car la relation $e_1+e_2-(e_1+e_2)=0$ contredit l'unicité de la décomposition du vecteur nul dans $F_1+F_2+F_3$.

Bilan : bases adaptées

➢ On développe la notion de **base adaptée à des supplémentaires** : Si F et G sont supplémentaires dans E, on dit que $\mathscr{B}=(e_1,\ldots,e_n)$ est adaptée à cette décomposition si les premiers vecteurs $(e_1,\ldots,e_p)$ forment une base de F et les derniers vecteurs $(e_{p+1},\ldots,e_n)$ forment une base de G.
Réciproquement, en prenant la réunion d'une base de F et d'une base de G, on obtient une base de E.

➢ On développe la notion de **base adaptée à une décomposition en somme directe** : Soit E un $\mathbb{K}-$ espace vectoriel de dimension finie. Soient F_1, ...,F_p des sous-espaces vectoriels de E.
On suppose que $E=F_1\bigoplus\cdots\bigoplus F_p$ et on note $\mathscr{B}_i$ une base de F_i, pour $i\in[\![1,p]\!]$.
On dit que $\{\mathscr{B}_1,\ldots,\mathscr{B}_p\}$ est une base adaptée à la décomposition de E en somme directe des F_i.



Arthur Cayley (1821 -1895)

IV. Applications linéaires

1. Définition et vocabulaire

E et F désignent deux $\mathbb{K}-$espaces vectoriels.

Définition 9 : On dit que l'application f de E dans F est linéaire si
$\forall x, y \in E,\ f(x+y) = f(x)+f(y)$ et $\forall x \in E,\ \forall \lambda \in \mathbb{K},\ f(\lambda x) = \lambda f(x)$.

Vocabulaire :

- On note $\mathscr{L}(E,F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F.
- Une **forme linéaire** est une application linéaire de E dans $\mathbb{K}$.
- Un **endomorphisme** est une application linéaire de E dans lui-même. Un **isomorphisme** est une application linéaire bijective. Un **automorphisme** est un endomorphisme bijectif.

Exemple 3 : Les plus classiques des endomorphismes seront revus par la suite : **les homothéties** ,**les projecteurs**, **les symétries**

Méthode : Comment définit-on une application linéaire ?

- en dimension finie, on donne les images d'une base de E,
- en dimension finie, on donne sa matrice dans des bases précisées,
- on donne ses restrictions à deux supplémentaires de E.

2. Image et noyau

Définition 10 : ✰ *Image et noyau d'une application linéaire*
Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$.

- On appelle **image de** f l'ensemble $\mathrm{Im} f = \{f(u),\ u \in E\}$. C'est un sous-espace vectoriel de F.
- On appelle **noyau de** f l'ensemble $\ker f = \{u \in E\ /\ f(u) = 0_F\}$. C'est un sous-espace vectoriel de E.

Remarque 4 :
$\mathrm{Im} f$ est l'image directe de E par f. C'est l'ensemble des vecteurs de F qui ont un antécédent par f.
$\ker f$ est l'image réciproque de $\{0_F\}$ par f. C'est l'ensemble des vecteurs de E ayant pour image 0_F par f.

Lien noyau/image avec injectivité/surjectivité
Proposition 10 ✰

Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$.
1) f est surjective si et seulement si $\mathrm{Im} f = F$.
2) f est injective si et seulement si $\ker f = \{0_E\}$.

Familles et applications linéaires
Proposition 11 ✰

Soient $E,\ F$ deux $\mathbb{K}-$espaces vectoriels et soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$. On suppose E de dimension finie.
Soit $(e_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ une base de E.
On a alors $\mathrm{Im} f = \mathrm{Vect}\big(f(e_1), f(e_2), \ldots, f(e_n)\big) = \mathrm{Vect}\big(f(e_i),\ i \in [\![1,n]\!]\big)$.

En dimension finie, on peut caractériser les isomorphismes. Soit $f \in L(E,F)$ avec E et F de **même dimension**.
f est bijective si et seulement si f est injective,
si et seulement si f est surjective,
si et seulement si l'image d'une base de E est une base de F.
si et seulement si sa matrice dans des bases est inversible.

3. Théorème du rang

Théorème 3 ✰ *Théorème du rang*
Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension finie et F un $\mathbb{K}-$espace vectoriel.
Soit f dans $L(E,F)$. $\mathrm{Im} f$ est un sous-espace vectoriel de F de dimension finie, sa dimension est appelée rang de f. De plus, on a $\dim\ker f + \mathrm{rg} f = \dim E$.

4. Matrices et applications linéaires
Dans le cas d'espaces E et F de dimensions finies, $\mathscr{B} = (e_1,\dots,e_p)$ est une base de E et $\mathscr{C} = (\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n)$ est une base de F. Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$.

Définition 11 : ✰ **La matrice de** f **dans les bases** $\mathscr{B}$ **et** $\mathscr{C}$, notée $Mat_{\mathscr{C}}^{\mathscr{B}}(f)$ est la matrice de $M_{n,p}(\mathbb{K})$ définie par $Mat_{\mathscr{C}}^{\mathscr{B}}(f) = (a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}$ où $\forall j \in [\![1,p]\!],\ f(e_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\varepsilon_i$.

La relation vectorielle $v = f(u)$ avec $u \in E$ et $v \in F$ se traduit matriciellement par

$$Mat_{\mathscr{C}}(v) = Mat_{\mathscr{C}}^{\mathscr{B}}(f) Mat_{\mathscr{B}}(u)\ .$$

Produit de matrices et composées

Définition 12 : Soient $A = (a_{ij}) \in M_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B = (b_{jk}) \in M_{p,q}(\mathbb{K})$.
La matrice produit de A et B est $AB = (c_{ik}) \in M_{n,q}(\mathbb{K})$ avec $\forall i,k \in [\![1,n]\!] \times [\![1,q]\!],\ c_{ik} = \sum_{j=1}^{p} a_{ij}b_{jk}$.

Interprétation du produit de deux matrices

Soient E muni d'une base $\mathscr{B}$, F muni d'une base $\mathscr{C}$ et G muni d'une base $\mathscr{D}$.
Si $f \in L(E,F)$ de matrice $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}^{\mathscr{B}}(f)$ et $g \in L(F,G)$ de matrice $B = \mathrm{Mat}_{\mathscr{D}}^{\mathscr{C}}(g)$,
alors BA est la matrice de $g \circ f$ dans les bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{D}$:

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{D}}^{\mathscr{B}}(g\circ f) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{D}}^{\mathscr{C}}(g) \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}^{\mathscr{B}}(f)$$

5. Sous-espaces stables par un endomorphisme

Définition 13 : Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel. Soit $f \in \mathscr{L}(E)$. Soit F un sous-espace vectoriel de E.
On dit que F est **stable par** f si $\forall u \in F,\ f(u) \in F$.

Remarque 5 : Si F, un sous-espace de E, est stable par $f \in \mathscr{L}(E)$, alors on définit **l'application induite par** f **sur** F en posant $\tilde{f} : \begin{array}{ccc} F & \to & F \\ u & \mapsto & f(u) \end{array}$.

Effet sur une matrice de f **dans une base adaptée**
Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension finie n.
Soit $f \in \mathscr{L}(E)$. Soit F un sous-espace vectoriel de E.
On suppose que F est stable par f. On considère une base $(e_1,\dots,e_p)$ de F, complétée en une $\mathscr{B} = (e_1,\dots,e_n)$ de E.
On a $\forall i \in [\![1,p]\!]$, $f(e_i) \in F = \mathrm{Vect}(e_1,\dots,e_p)$ donc la matrice de f dans la base $\mathscr{B}$ est de la forme :

$$Mat_{\mathscr{B}}(f) = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 0 & C \end{array}\right)$$ avec $A \in M_p(\mathbb{K})$, $B \in M_{p,n-p}(\mathbb{K})$, et $C \in M_{n-p}(\mathbb{K})$.

Remarque 6 : Supposons maintenant que F et G soient deux supplémentaires dans E, tous les deux stables par f. Quelle sera la forme de la matrice de f dans une base $\mathscr{B}$ adaptée à la somme $F \bigoplus G = E$?

V. Endomorphismes remarquables d'un espace vectoriel

1. Homothétie

Soit E un $\mathbb{K}$−espace vectoriel.

Définition 14 :
Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ On appelle **homothétie** (de rapport λ) l'application $\begin{array}{ccc} E & \to & E \\ x & \mapsto & \lambda x \end{array}$. Elle est notée $\lambda \mathrm{Id}_E$.

On vérifie les affirmations suivantes :

- Id_E et l'application nulle sont des homothéties.
- Pour $\lambda \neq 0$, $\lambda \mathrm{Id}_E$ est dans $\mathcal{GL}(E)$.
- Les homothéties commutent avec tout élément de $\mathcal{E}$: $\forall \lambda \in \mathbb{K},\ \forall f \in \mathcal{L}(E),\ \lambda \mathrm{Id}_E \circ f = f \circ \lambda \mathrm{Id}_E = \lambda f$.
- Pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2,\ \lambda \mathrm{Id}_E \circ \mu \mathrm{Id}_E = (\lambda\mu)\mathrm{Id}_E$.
- Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}^*,\ \lambda \mathrm{Id}_E \in \mathcal{GL}(E)$ et sa bijection réciproque est $\dfrac{1}{\lambda}\mathrm{Id}_E$ (qui est aussi une homothétie).
- Si E est de dimension finie n, pour toute base $\mathcal{B}$ de E, $Mat_{\mathcal{B}}(\lambda \mathrm{Id}_E) = \lambda I_n$.

2. Projecteurs

Soit E un $\mathbb{K}$−espace vectoriel.

Définition 15 : ✰
Soient F et G deux supplémentaires dans E.
Pour tout $x \in E$, il existe un unique couple $(u, v) \in F \times G$ tel que $x = u + v$.
L'application $p : \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ x & \mapsto & u \end{array}$ est appelée **projection vectorielle sur** F **parallèlement à** G.

Remarque 7 :
On définit aussi la projection sur G parallèlement à F en posant, avec les mêmes notations, $q : \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ x & \mapsto & v \end{array}$. *On a alors* $q = Id_E - p$ *car* $\forall x \in E,\ q(x) = x - p(x)$.

Proposition 12

Soient F, G deux supplémentaires dans E et p la projection sur F parallèlement à G.
1) $p \in \mathcal{L}(E)$ et $p \circ p = p$.
2) $\mathrm{Im} p = F = \ker(\mathrm{Id}_E - p)$ et $\ker p = G$.

Proposition 13 ✰

Soit $p \in \mathcal{L}(E)$. Si p vérifie $p^2 = p$ alors
1) $\mathrm{Im} p$ et $\ker p$ sont supplémentaires dans E.
2) p est la projection vectorielle sur $\mathrm{Im} p$ parallèlement à $\ker p$.

On appelle **projecteur** tout endomorphisme tel que $p^2 = p$.

3. Symétries

Soit E un $\mathbb{K}$−espace vectoriel.

Définition 16 :
Soient F et G deux supplémentaires dans E.
Pour tout $x \in E$, il existe un unique couple $(u, v) \in F \times G$ tel que $x = u + v$.
L'application $s : \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ x & \mapsto & u - v \end{array}$ est appelée **symétrie par rapport à** F **parallèlement à** G.

Remarque 8 :
On définit aussi la symétrie par rapport à G parallèlement à F en posant, avec les mêmes notations, $\sigma : \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ x & \mapsto & -u + v \end{array}$.
On a alors $\sigma = -s$. *On remarquera aussi que* $s = 2p - Id_E$ *où* p *est la projection sur* F *parallèlement à* G.

Exemple 4

Dans $E = \mathbb{R}^2$ muni de (e_1, e_2) sa base canonique, l'application $s : \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ (a,b) & \mapsto & (a,-b) \end{array}$ est la symétrie par rapport à $F = \mathrm{Vect}(e_1)$ parallèlement à $G = \mathrm{Vect}(e_2)$.

Proposition 14

> Soient F, G deux supplémentaires dans E et s la symétrie par rapport F parallèlement à G.
> 1) $s \in \mathscr{L}(E)$ et $s \circ s = \mathrm{Id}_E$.
> 2) $\ker(s - \mathrm{Id}_E) = F$ et $\ker(s + \mathrm{Id}_E) = G$.

Proposition 15

> Soit $s \in \mathscr{L}(E)$. Si s vérifie $s^2 = \mathrm{Id}_E$ alors
> 1) $\ker(s - \mathrm{Id}_E)$ et $\ker(s + \mathrm{Id}_E)$ sont supplémentaires dans E.
> 2) s est la symétrie par rapport à $\ker(s - \mathrm{Id}_E)$ parallèlement à $\ker(s + \mathrm{Id}_E)$.

4. Familles de projecteurs associés à une décomposition en somme directe

Soit E un $\mathbb{K}$−espace vectoriel et $E_1, \ldots, E_m$ des sous-espaces de E tels que $E = E_1 \bigoplus \cdots \bigoplus E_m$.

Proposition 16

> Soit $i \in [\![1, m]\!]$, E_i et $F_i = \bigoplus\limits_{j \neq i} E_j$ sont des supplémentaires dans E.

démo : Avant de commencer, on vérifie que la somme des E_j, pour $j \neq i$ est bien directe. Un vecteur u de cette somme est un vecteur de E : il sécrit $u = u_1 + \cdots + u_{i-1} + u_{i+1} + \cdots + u_m = u_1 + \cdots + u_{i-1} + 0 + u_{i+1} + \cdots + u_m$ et par unicité de l'écriture dans $E_1 \bigoplus \cdots \bigoplus E_m$, on conclut à l'unicité des u_j, pour $j \neq i$.
➢ On a directement $E = E_i + F_i$ car $E = E_1 + \cdots + E_m$.
➢ On doit prouver que $E_i \cap F_i = \{0\}$. Prenons $u \in E_i \cap F_i$.
$u \in F_i$ permet d'écrire $u = u_1 + \cdots + u_{i-1} + u_{i+1} + \cdots + u_m$, donc $0 = u_1 + \cdots + u_{i-1} + (-u) + u_{i+1} + \cdots + u_m$. Chaque vecteur de cette somme est dans l'un des E_i et par propriété sur les sommes directes, on conclut que $u_1 = 0$, ...,$u = 0$,... Donc $E_i \cap F_i = \{0\}$.

Soit $u \in E$, on peut l'écrire de manière unique comme somme de vecteurs des E_i :
$u = u_1 + \cdots + u_m$, avec $\forall i \in [\![1, m]\!],\ u_i \in E_i$.
Pour tout $i \in [\![1, m]\!]$, on pose $p_i : \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ u & \mapsto & u_i \end{array}$. p_i est la projection sur E_i parallèlement à F_i.

On dit que les p_i sont les projecteurs **associés à la décomposition de** E **en somme directe** $E = \bigoplus\limits_{i=1}^{m} E_i$.

Proposition 17

> 1) $\forall i,\ j \in [\![1, m]\!]$ tels que $i \neq j,\ p_i \circ p_j = 0$.
> 2) $p_1 + \cdots + p_m = \mathrm{Id}_E$.

démo

1) Soient $i,\ j \in [\![1, m]\!]$ tels que $i \neq j$. Soit $u \in E$, on a $p_j(u) \in E_j \subset F_i$. Or p_i est la projection sur E_i parallèlement à F_i, donc $F_i = \ker p_i$.
   On a donc $p_i(p_j(u)) = 0$. Cela permet de conclure que $p_i \circ p_j = 0$.
2) $p_1 + \cdots + p_m = \mathrm{Id}_E$ découle de $\forall u \in E,\ u = u_1 + \cdots + u_m$, avec $\forall i \in [\![1, m]\!],\ u_i \in E_i$ et de la définition des p_i.

VI. Hyperplans

1. Définition et caractérisations

Soit E un $\mathbb{K}$−espace vectoriel

> **Définition** 17 : ✰ Soit H un sous-espace vectoriel de E.
> On dit que H est un **hyperplan** de E s'il admet un supplémentaire de dimension 1 dans E.

Proposition 18

> Si E est de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$ et H est un sous-espace H de E,
> H est un hyperplan si et seulement si $\dim H = n-1$.

démo

Les propriétés suivantes sont démontrées dans le cas de la dimension finie mais restent vraies dans le cas général.

Proposition 19 ✰

> Soit H un sous-espace vectoriel de E, de dimension finie, $H \neq E$.
> H est un hyperplan si et seulement si pour tout $u \notin H$, H et $\mathrm{Vect}(u)$ sont supplémentaires dans E.

démo ➢ On suppose que H est un hyperplan : il existe $D = \mathrm{Vect}(v)$ avec $v \neq 0$ tel que $H \bigoplus D = E$.
Soit $u \notin H$, montrons que $H \bigoplus \mathrm{Vect}(u) = E$.
➞ On sait déjà que $\dim H + \dim \mathrm{Vect}(u) = \dim E$.
➞ Soit $x \in H \cap \mathrm{Vect}(u)$, on a $x = \alpha u$ avec $\alpha \in \mathbb{K}$.
Supposons par l'absurde que $\alpha \neq 0$, on aurait alors $u = \dfrac{1}{\alpha} x$ et donc $u \in H$. Cela contredit l'hypothèse sur u, donc $\alpha = 0$ et donc $x = 0$.
➞ On a montré que H et $\mathrm{Vect}(u)$ sont supplémentaires dans E.
➢ L'implication réciproque est immédiate par définition d'un hyperplan.

2. Équation d'hyperplan dans une base

Proposition 20

> On suppose que E est de dimension n et on note $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E. Tout hyperplan de E admet une équation (dans $\mathscr{B}$) de la forme $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = 0$ avec $a_1, \dots, a_n$ des éléments de $\mathbb{K}$ non tous nuls.
> Réciproquement tout ensemble admettant une telle équation est un hyperplan de E.

démo :Soit H un hyperplan, et notons $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1})$ une base de H. On complète cette famille libre en $\mathscr{B}' = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ une base de E.
Prenons un vecteur $x \in E$: ses coordonnées dans $\mathscr{B}$ sont notées $(x_1, \dots, x_n)$ et ses coordonnées dans $\mathscr{B}'$ sont $(x'_1, \dots, x'_n)$.
On sait par construction de $\mathscr{B}'$ que $x \in H \iff x'_n = 0$.
On note P la matrice de passage de la base $\mathscr{B}$ à la base $\mathscr{B}'$. Par les relations de changement de coordonnées, on a $X = PX'$, donc $X' = P^{-1}X$, où $X = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x)$ et $X' = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(x)$.
Donc il existe $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n$ (les coefficients de la dernière ligne de P^{-1}), tels que $x'_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i x_i$.
Donc $x \in H \iff \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i a_i = 0$. Voici donc l'équation de H dans la base $\mathscr{B}$.
Réciproquement, si $G = \{x = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i e_i \in E \ / \ \sum_{i=1}^{n} a_i x_i = 0\}$, alors G est le noyau de ψ définie par $x \mapsto \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i x_i$. ψ est une application linéaire de E dans K. De plus, les a_i étant non tous nuls, ψ est une application linéaire non nulle. Donc son image est de dimension au moins 1, et comme $\mathrm{Im}\psi \subset \mathbb{K}$, on peut conclure que $\mathrm{Im}\psi = \mathbb{K}$.
En appliquant le théorème du rang, on déduit que $H = \ker\psi$ est de dimension $n-1$. Donc H est un hyperplan de E.

Remarque 9 : Deux équations proportionnelles décrivent le même hyperplan. On peut montrer qu'un hyperplan admet une unique équation dans $\mathscr{B}$, à un coefficient de proportionnalité près. C'est l'objet de la propriété suivante, qui n'est pas au programme.

Proposition 21

> Soient φ et ψ deux formes linéaires non nulles. φ et ψ sont colinéaires si et seulement si $\ker\varphi = \ker\psi$.

démo On démontre ce résultat en dimension finie.
➢ Si il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $\psi = \lambda\varphi$ alors on prouve facilement que $\ker\varphi = \ker\psi$.
➢ Supposons que $\ker\varphi = \ker\psi$, et prenons $u \notin \ker\varphi$.
➞ On a $\varphi(u) \neq 0$ et $\psi(u) \neq 0$, donc on peut poser $\lambda = \dfrac{\psi(u)}{\varphi(u)}$ (remarquez que le quotient est bien défini ici car $\psi(u)$ et $\varphi(u)$ sont des scalaires). On a alors $\psi(u) = \lambda\varphi(u)$ et on va montrer que ceci est vrai pour tout vecteur x de E.
➞ On sait que $u \notin \ker\varphi$, et que $\ker\varphi$ est un hyperplan (prop....) donc $\mathrm{Vect}(u) \oplus \ker\varphi = E$.
Prenons $x \in E$: on peut l'écrire $x = \alpha u + h$ avec $\alpha \in \mathbb{K}$ et $h \in \ker\varphi$.

On a donc $\varphi(x) = \alpha\varphi(u)$. Comme $\ker\varphi = \ker\psi$, on a aussi $\psi(x) = \alpha\psi(u)$.
Donc $\psi(x) = \alpha(\lambda\varphi(u)) = \lambda(\alpha\varphi(u)) = \lambda\varphi(x)$.
On a bien montré que, pour tout $x \in E$, $\psi(x) = \lambda\varphi(x)$. Donc $\psi = \lambda\varphi$.

3. Sous-espace de dimension p et intersection d'hyperplans

Proposition 22

Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension n. Soit $p \in [\![1, n]\!]$.
- L'intersection de p hyperplans est de dimension au moins $n - p$.
- Tout sous-espace de dimension $n - p$ est l'intersection de p hyperplans.

démo

➢ Par récurrence sur p avec l'hypothèse :
HR(p) : pour p hyperplans H_1, ..., H_p de E, on a $\dim H_1 \cap \cdots \cap H_p \geqslant n - p$.
Initialisation : Pour $p = 1$, un hyperplan est de dimension $n - 1$.
Pour $p = 2$, on considère deux hyperplans H_1 et H_2 et on applique la formule de Grassmann : $\dim(H_1 + H_2) = \dim H_1 + \dim H_2 - \dim(H_1 \cap H_2)$. Or $H_1 + H_2 \subset E$ donc $\dim(H_1 + H_2) \leqslant n$.
On en déduit $\dim(H_1 \cap H_2) \geqslant \dim H_1 + \dim H_2 - n = n - 2$.
Hérédité : Supposons que pour p hyperplans H_1, ..., H_p on ait $\dim H_1 \cap \cdots \cap H_p \geqslant n - p$.
Prenons $p+1$ hyperplans H_1, ..., H_{p+1}, et appliquons la formule de Grassmann à H_{p+1} et $G = H_1 \cap \cdots \cap H_p$. On a encore $\dim(G + H_{p+1}) \leqslant n$, on trouve donc $\dim H_1 \cap \cdots \cap H_{p+1} = \dim H_{p+1} + \dim G - \dim(G + H_{p+1}) \geqslant n - 1 + n - p - n = n - (p+1)$.
On conclut d'après le principe de récurrence.

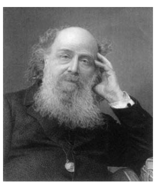
➢ Soit un espace F de dimension $n - p$: on considère une base $(e_1, \ldots, e_{n-p})$ de F que l'on complète en une base $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ de E.
On pose ensuite pour $i \in [\![n-p+1, n]\!]$, $H_i = \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_{i-1}, e_{i+1}, \ldots, e_n)$. Ce sont des hyperplans de E.
Chaque H_i a une équation dans $\mathscr{B}$: $x_i = 0$. On peut alors vérifier que $F = \bigcap_{i=n-p+1}^{n} H_i$.
L'inclusion $F \subset \bigcap_{i=n-p+1}^{n} H_i$ est directe car $F = \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_p)$.
Et si $x \in \cap_{i=n-p+1}^{n} H_i$, alors $\forall i \in [\![n-p+1, n]\!]$ on aura $x_i = 0$, donc $x = \sum_{i=1}^{p} x_i e_i \in F$. Ce qui prouve que $\bigcap_{i=n-p+1}^{n} H_i \subset F$.
Donc $F = \bigcap_{i=n-p+1}^{n} H_i$ est l'intersection de p hyperplans.

Système d'équation d'un sous-espace vectoriel de E dans une base $\mathscr{B}$.

Prenons F un sous-espace de dimension p, d'un $\mathbb{K}-$espace E de dimension n.
Il existe donc $n - p$ hyperplans H_1,...,H_{n-p} tels que $F = \bigcap_{i=1}^{n-p} H_i$.
Chaque hyperplan possède une équation dans $\mathscr{B}$: Pour H_k, l'équation sera notée $\sum_{i=1}^{n} a_{k,i} x_i = 0$.

Le système $\begin{cases} a_{1,1}x_1 + \ldots + a_{1,n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{n-p,1}x_1 + \ldots + a_{n-p,n}x_n = 0 \end{cases}$ est appelé **système d'équations de** F.

Réciproquement, tout système de ce type correspond à l'intersection de $n - p$ hyperplans : l'ensemble de ses solutions est donc un sous-espace vectoriel de E de dimension au moins p.



James Sylvester (1814-1897)